Зимний тур XXIX Турнира Архимеда
Условия и решения задач

Задача 1 (3 балла). Подберите вместо букв цифры так, чтобы получилось верное равенство (одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, разными буквами — разные):

$$\text{ТУ} = \text{Р} \times \text{Н} = \text{И} + \text{Р}.$$

Постарайтесь найти три подходящих набора цифр.

Ответ: 1) 1; 0; 2; 5; 8;

2) 1; 2; 3; 4; 9;

3) 1; 2; 4; 3; 8.

Решение.

1) $10 = 2 \times 5 = 8 + 2$, 2) $12 = 3 \times 4 = 9 + 3$, 3) $12 = 4 \times 3 = 8 + 4$.

Способ поиска решений (от участников не требовалось).

$И + Р \le 17 => \overline{ТУ} \le 17$

$\overline{ТУ} \ne$ 11, 13, 17 — потому, что произведение не может быть простым числом.

Остались 10, 12, 14, 15, 16

$10 = 2 \cdot 5 = 8 + 2$, подходит.

$10 = 5 \cdot 2 = 5 + 5$, не подходит, получили Р = И.

$12 = 4 \cdot 3 = 8 + 4$, подходит.

$12 = 3 \cdot 4 = 9 + 3$, подходит.

$12 = 2 \cdot 6 = a + b$, не подходит, цифру 2 обозначают различные буквы (с точностью до перестановки множителей).

$14 = 2 \cdot 7 = 12 + 2$, не подходит, И — не цифра

$14 = 7 \cdot 2 = 7 + 7$, не подходит, Р = И.

$15 = 3 \cdot 5 = a + b$, не подходит, цифру 5 обозначают различные буквы (с точностью до перестановки множителей).

$16 = 2 \cdot 8 = 14 + 2$, не подходит, И — не цифра

$16 = 8 \cdot 2 = 8 + 8$, не подходит, Р = И.

Комментарий Жюри:

1. За каждый верный пример ставился 1 балл.

Задача 2 (5 баллов). Серый Волк и Иван-царевич шли добывать Живую Воду. Иван всё время шёл с постоянной скоростью — 3 км/ч. Волк же сперва шёл рядом, но в 13.50 убежал вперёд — проверить, нет ли у колодца с Живой Водой какой-либо опасности. Он увеличил скорость до 5 км/час, добежал до колодца, мгновенно всё проверил и побежал обратно, встретив Ивана в 14.05. Дальше Иван шёл один. В какое время был у колодца: а) Серый Волк? б) Иван-царевич?

Ответ: а) Серый Волк был у колодца в 14.02;

б) Иван-царевич был у колодца в 14.10.

Решение.

1) Серый Волк бегал от колодца и обратно 15 мин (четверть часа). За это время он пробежал 1,25 км, а Иван-царевич прошёл 0,75 км.

2) Вместе же они прошли удвоенный путь от места старта Серого Волка до колодца (сделать рисунок). Следовательно, расстояние от места старта Серого Волка до колодца – 1 км.

3) Это расстояние Серый Волк пробегает за 0,2 час, то есть за 12 мин, а Иван-царевич за 20 мин.

4) Следовательно, Иван-царевич был у колодца в 14.10, а Серый Волк в 14.02.

Комментарий Жюри:

1. Правильно и обоснованно получен ответ только для Ивана или только для Волка – 2 балла.

2. Арифметическая ошибка – минус 1 балл.

Задача 3 (6 баллов). Буратино пошёл на базар и потратил все свои деньги, купив азбуку, колпачок и курточку. Пьеро спросил его, сколько он потратил денег. Буратино ответил, что всего потратил 63 золотых сольдо, причём на азбуку и колпачок потратил 21 сольдо, на колпачок и курточку — 28 сольдо, а на азбуку и курточку — 33. Известно, что Буратино, часто путает числа, но, называя какое-нибудь число, ошибается не более чем на 9. Помогите Пьеро понять, сколько золотых сольдо потратил Буратино на самом деле. *Все цены на базаре выражаются целыми числами.*

Ответ: Да, могло.

Решение.

1) Буратино сказал, что потратил 63 сольдо (всего), следовательно, он реально потратил не меньше 54 сольдо.

2) Сказано, что на азбуку и колпачок потрачено 21 сольдо, следовательно, он потратил на них не больше 30 сольдо.

3) Сказано, что на колпачок и курточку потрачено 28 сольдо, значит, реально на них потрачено не больше 37 сольдо.

4) Сказано, что на азбуку и курточку потрачено 33 сольдо, не больше 42 сольдо.

5) Получается, что на 2 азбуки, 2 колпачка и 2 курточки потрачено не больше 109 сольдо, а значит, на 1 азбуку, 1 колпачок, 1 курточку не больше $\frac{109}{2}=54,5$ сольдо, а так как цены – целые числа, не больше 54 сольдо.

Комментарий Жюри:

За решение на примере или без пояснений (только вычисления) – не более 3 баллов.

За решение только на примере или проверке ответа – 1 балл

Задача 4 (6 баллов). За круглым столом сидело 12 гостей. Среди них есть рыцари (всегда говорят правду), лжецы (всегда лгут) и марсиане. Про марсиан известно, что правду они говорят только марсианам, а всем остальным лгут. Известно, что каждый сидящий за столом сказал своему соседу справа: «Ты — лжец». Сколько рыцарей сидело за столом? Найдите все возможные варианты ответа и докажите, что других нет.

Ответ: 4 или 5 рыцарей.

Решение.

1) Справа от рыцаря может сидеть только лжец, слева от лжеца может сидеть только рыцарь (потому что сказать лжецу: «Ты – лжец» может только рыцарь).

2) Таким образом, рыцари и лжецы сидят парами «рыцарь – лжец», и их (вместе) чётное количество.

3) Марсиане никогда не сидят рядом – марсианин марсианину не скажет «Ты – лжец». Не могут они сидеть и через одного, так как, если между марсианами посадить рыцаря, то справа от рыцаря потребуется место для лжеца, а если посадить лжеца, то слева от лжеца потребуется место для рыцаря.

4) Так как за столом 12 гостей – чётное число, то из отмеченного выше следует, что количество марсиан чётно.

Рассмотрим случаи:

а) ≥ 6 марсиан быть не может, так как они не могут сидеть рядом или через одного.

б) Если марсиан 4, то рыцарей должно быть половина от разности (12 – 4), то есть 4. Пример: МРЛМРЛМРЛМРЛ.

в) Если марсиан 2, то рыцарей должно быть половина от разности (12 – 2), то есть 5. Пример: МРЛРЛМРЛРЛРЛ.

Комментарии Жюри:

1. Если только показано, что 5 рыцарей может быть (пример) – 1 балл

2. Если только показано, что 4 рыцаря может быть (пример) – 1 балл

3. Возможно переборное решение (на графе) по схеме: за рыцарем только лжец, далее: либо марсианин, либо рыцарь… − с той или иной степенью полноты перебора. Если перебор не полный, не более 3−4 баллов.

4. За верный ответ (оба варианта) без объяснений - 1 балл.

5. Многие участники ограничивались лишь объяснением способа построения примеров для 4 и 5 рыцарей (т.е. фактически пункты 1 и 2 выше), но не доказывали, что не может быть меньше или больше этого количества. За это ставилось 2-4 балла в зависимости от полноты объяснений.

6. Если в решении есть предположение, что отсутствуют марсиане (пример для 6 рыцарей) – минус 2 балла.

Задача 5 (6 баллов). Вася хочет написать на доске несколько последовательных семизначных чисел, каждое из которых делится на произведение своих цифр. Какое наибольшее количество таких чисел он сможет написать? Напоминаем, что на нуль делить нельзя.

Ответ: 3. Примеры таких чисел?

Решение:

1) (ОЦЕНКА) Докажем, что четырёх последовательных чисел, обладающим этим свойством, быть не может. Предположим противное. Пусть существует четыре последовательных семизначных числа, каждое из которых делится на произведение своих цифр.

Тогда среди них имеется два чётных (одно из них кратно 4, а другое не кратно 4).

2) Выберем то из них, которое не кратно 4. Рассмотрим отдельно два случая:

2.1.) Последняя цифра выбранного числа равна 0, 4 или 8.

Случай, когда она равна 0, не подходит, так как произведение цифр равно 0, а на 0 делить нельзя.

Если последняя цифра равна 4 или 8, то произведение цифр кратно 4, выбранное число делится на это произведение, значит, оно кратно 4, что противоречит выбору числа (пункт 2).

2.2.) Последняя цифра выбранного числа равна 2 или 6. Тогда по признаку делимости на 4, вторая с конца цифра — чётная, значит, произведение двух последних цифр кратно 4 (в частности, может быть равна 0).

Случай, когда она равна 0, не подходит, так как произведение цифр равно 0, а на 0 делить нельзя.

В случае, когда оно не равно 0 произведение двух последних цифр кратно 4, выбранное число делится на это произведение, значит, оно тоже кратно 4, что противоречит выбору числа (пункт 2).

3) Предположение пункта 1, что существует четыре последовательных семизначных числа, каждое из которых делится на произведение своих цифр, приводит к противоречию, следовательно, это предположение неверно.

4) (ПРИМЕР) Три последовательных семизначных числа, делящиеся на произведение своих цифр: 1111111; 1111112 и 1111113 или 1111115, 1111116 и 1111117.

Комментарии Жюри:

1. Присутствует идея рассматривать два соседних чётных числа и доказывать, что не кратное 4 число, имеет произведение цифр, кратное 4 – 2 балла

2. При верном ходе решения не рассмотрен случай, когда произведение цифр равно 0 – минус 1балл

3. Приведен только пример для трёх чисел – 1 балл.

4. Только ответ без примера – 0 баллов.

Задача 6 (9 баллов). На клетчатом табло 8×8 в каждой клетке — электрическая лампочка. По указанию Деда Мороза требуется так включить лампочки, чтобы в каждом квадрате 3×3 было включено ровно три лампочки. Какое наименьшее и какое наибольшее количество лампочек может быть включено, чтобы указание было выполнено? Не забудьте обосновать ответ.

Ответ: Наименьшее количество – 16, наибольшее количество – 27.

Решение.

1. Наибольшее количество – 27

1.1. (оценка) Докажем, что больше 27 разместить нельзя. Рассмотрим квадрат 9×9.

Понятно, что внутри квадрата 9×9 размещается ровно 9 квадратов 3×3, а, следовательно, разместить больше 27 лампочек нельзя.

Разместим в квадрате 9×9 квадрат 8×8. Понятно, что в нём больше 27 лампочек разместить не получится (рис.1.)

Оценка может быть получена также из разбиения на рис. 2. В каждой из 9 частей квадрата 8×8 (независимо от размера и формы) там не более 3 лампочек.

1.2. (пример). Пример 27 лампочек, включенных так, что в каждом квадрате 3×3 включено ровно три лампочки (см. рис.3.)

2. Докажем, что требуется включить не менее 16 лампочек.

2.1. (оценка) Докажем, что меньше 16 включить нельзя. Рассмотрим рис. 2. Заметим, что в четырёх полных квадратах 3×3 – не менее 12 лампочек и двух "квадратах" 3×3 без угла – не менее 4 лампочек. Итого – всего не менее 16 лампочек.

2.2. (пример) Пример, когда включено ровно 16 лампочек (см. рис. 4.)

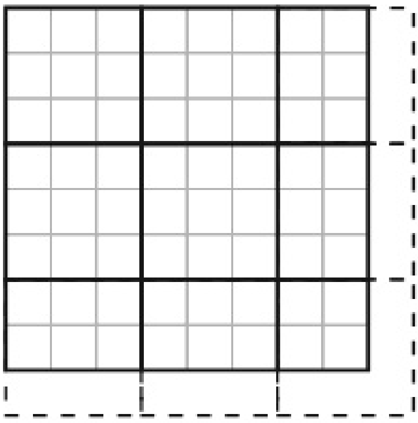

Рис.1.

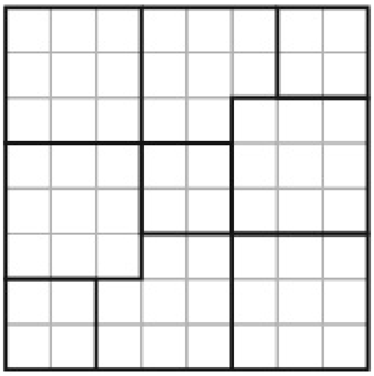

Рис.2

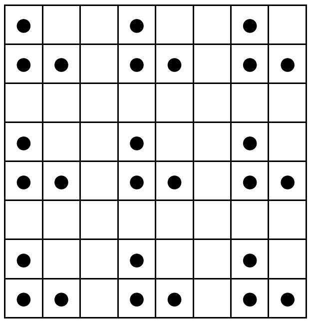

Рис.3

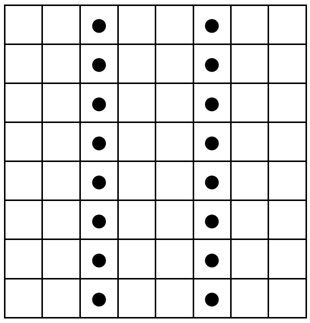

Рис.4.

Комментарий Жюри:

9 баллов – полное обоснованное решение.

Оно суммируется из:

1.1. (оценка для наибольшего количества лампочек) – 3 балла.

1.2. (пример для наибольшего количества лампочек) – 2 балла.

2.1. (оценка для наименьшего количества лампочек) – 3 балла.

2.2. (пример для наименьшего количества лампочек) – 1 балл..