Олимпиада Ломоносов по математике

7–8 классы, 2019 год

1. У Миши есть набор из девяти карточек с буквами слова «ЛОМОНОСОВ». На оборотной стороне каждой карточки Миша написал по цифре так, что на карточках с одинаковыми бук-вами цифры одинаковы, а на карточках с разными буквами различны. При этом оказалось верным равенство

О О

Л + М + О + Н + С = ОВ;

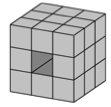
в котором обе входящие в него дроби являются правильными. Какие цифры мог написать Миша на карточках? Найдите все решения.

2. Убедитесь, что 1009 = 152 + 282, и представьте число 2018 в виде суммы двух квадратов натуральных чисел.

3. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведены биссектриса BD и вы-сота CH. Из вершины C на биссектрису BD опущен перпендикуляр CK. Найдите угол HCK, если BK : KD = 3 : 1.

4. Стрелочные часы показывают ровно час. Комар и муха сидят на одинаковом расстоянии от центра на часовой и минутной стрелках соответственно. Когда стрелки совпадают, насекомые меняются местами. Во сколько раз расстояние, которое за полсуток преодолел комар, больше расстояния, которое преодолела за это же время муха?

5. Каждую клетку таблицы 33 раскрашивают в один из трёх цветов так, что клетки, имеющие общую сторону, имеют разный цвет. Среди всех возможных таких раскрасок найдите долю тех, в которых использовано ровно два цвета.

6. Из 24 одинаковых деревянных кубиков склеили «трубу» куб 333 с убранной «сердцевиной» из трёх кубиков (см. рисунок). Можно ли в каждом квадратике на поверхности «трубы» провести диагональ так, чтобы получился замкнутый путь, который ни через одну вершину не проходит дважды?

1

7. На столе лежат карточки с числами от 1 до 8: одна карточка с числом 1, две с числом 2, три с числом 3, и т. д. Петя и Вася поочерёдно берут по одной карточке и складывают в одну колоду (начинает Петя). После очередного хода Васи Петя может сказать ¾стоп¿, и тогда все невыбранные карточки убираются со стола, а далее Вася и Петя поочерёдно выбирают любые карточки из получившейся колоды (начинает Вася) и выкладывают их на стол слева направо. Если после того, как на стол будет выложена последняя карточка, получившееся число будет являться разностью квадратов каких-то целых чисел, побеждает Вася, иначе побеждает Петя. Может ли кто-то из игроков действовать так, чтобы обеспечить себе выигрыш независимо от действий другого?

2