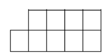
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«ПОКОРИ ВОРОБЬЁВЫ ГОРЫ!»

Решения задач заочного тура по МАТЕМАТИКЕ

2015/2016 учебный год

5-6 Классы

1. Разместите числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 в девяти клетках фигуры, изображенной на рисунке, так, чтобы сумма чисел в каждом столбце, начиная со второго, была на 1 больше, чем в предыдущем. Достаточно найти хотя бы одну такую расстановку. В ответе укажите число, стоящее в первом столбце.

   Ответ: 32.

   Решение: Не будем пока следить за порядком чисел в одном столбце.

   Сумма указанных чисел равна 45, обозначим x число стоящее в самой левой нижней клетке. Тогда $5x + 10 = 45$, откуда $x = 7$. Значит сумма чисел во втором столбце равна $8 = 5+3 = 6+2$. Если во втором столбце стоят 3 и 5, то в третьем столбце должны стоять 1 и 8, в четвертом — 6 и 4, в последнем — 2 и 9. Если во втором столбце стоят 6 и 2, то в третьем столбце могут стоять 1 и 8 или 4 и 5. Можно показать, что если в третьем столбце стоят 1 и 8, то невозможно подобрать числа в четвертом столбце. Значит там стоят 4 и 5, тогда в четвертом столбце стоят 1 и 9, а в последнем — 3 и 8. Получилось 2 варианта расстановки без учета порядка.

   Заметим, что в каждом столбце (кроме первого) числа можно менять местами, что дает по 16 вариантов для каждой расстановки. В итоге получаем 32 варианта с учетом порядка чисел в столбцах.

2. Деревни “Верхние Васюки” и “Нижние Васюки” расположены на берегу реки. Пароход проходит расстояние от Верхних до Нижних Васюков за один час, а катер — за 45 минут. Известно, что скорость катера в стоячей воде в два раза больше скорости парохода (тоже в стоящей воде). Определите, какое время (в минутах) потребуется плоту, чтобы спуститься из Верхних Васюков в Нижние Васюки?

   Ответ: 90 минут.

   Решение: Возьмем расстояние между деревнями за единицу длины (ед). Тогда скорость парохода по течению равна 1 ед./ч, а катера — 4/3 ед./ч. Следовательно, собственная скорость парохода равна 1/3 ед./ч, откуда скорость течения равна 2/3 ед./ч. Следовательно, плот пройдет расстояние 1 ед. за 3/2 часа.

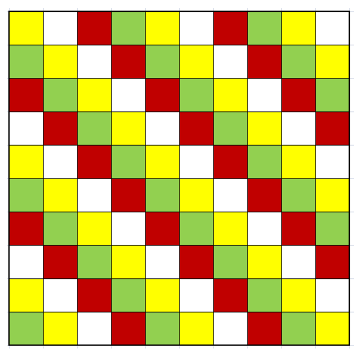
3. Решить ребус (одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные). В ответе укажите число, соотвествующее слову «восемь».
$$\begin{array}{cccccc} \text{ч} & \text{е} & \text{т} & \text{ы} & \text{р} & \text{е} \\ + & & & & & \\ \text{ч} & \text{е} & \text{т} & \text{ы} & \text{р} & \text{е} \\ \hline \text{в} & \text{о} & \text{с} & \text{е} & \text{м} & \text{ь} \end{array}$$

   Ответ: $239153 + 239153 = 478306$.

4. Доска для игры в «морской бой» имеет размер 10×10. Какое наибольшее число кораблей размера 1×4 можно разместить на ней?

   Ответ: 24.

   Решение: Подбором легко показать, что 24 корабля расположить можно. Раскрасим доску в 4 цвета, как показано на рисунке. Заметим, что каждый корабль размера 1×4 содержит по одной клетке каждого цвета, а клеток желтого цвета будет 24.



5. Найдите количество пар натуральных чисел (x, y), $1 \leqslant x, y \leqslant 1000$, таких, что $x^2 + y^2$ делится на 5 нацело.

   Ответ: 360000.

   Решение: Всего у нас есть по 200 чисел, дающих каждый из остатков 0, 1, 2, 3, 5 при делении на 5. Возможны два случая: а) числа x, y либо оба кратны 5; б) либо одно из чисел дает остаток 1 или 4, а другое — 2 или 3 при делении на 5. В первом случае получаем $200 \times 200 = 40000$ вариантов, во втором $2 \times 400 \times 400 = 320000$, всего $40000 + 320000 = 360000$.

6. Пусть $\Sigma(n)$ обозначает сумму цифр числа n. Найдите наименьшее трехзначное n, такое, что $\Sigma(n) = \Sigma(2n) = \Sigma(3n) = \ldots = \Sigma(n^2)$

   Ответ: 999.

   Решение: Обозначим искомое число $\overline{abc}$. Заметим, что это число не меньше 101 (т.к. 100 не подходит). Следовательно $101 \cdot \overline{abc} = \overline{abc00} + \overline{abc}$

тоже имеет такую же сумму цифр. Но у этого числа последние цифры, очевидно, b и c, следовательно, сумма остальных цифр должна быть равна a. Следовательно $\Sigma(\overline{abc} + a) = a$. Если $a < 9$, то $\overline{abc} + a$ — трехзначное число, первая цифра которого не меньше a, что приводит к противоречию, т.к. вторая и третья цифра не могут быть нулями. Таким образом, $a = 9$ и $\overline{abc}+a \leqslant 999+9 = 1008$. Поэтому $\overline{abc}+a = \overline{100d}$. Но $\Sigma(\overline{100d}) = a = 9$, следовательно, $d = 8$, откуда $\overline{abc} = 999$.