

7 класс, решения

За верный ответ к каждой задаче дается 1 балл

Задача 1. В мешке лежали карточки с числами от 1 до 20. Влад вытащил 6 карточек и сказал, что все эти карточки можно разбить на пары так, что суммы чисел в каждой паре одинаковые. Лена успела подсмотреть 5 карточек Влада: на них были написаны числа 2, 4, 9, 17, 19. Карточку с каким числом не успела подсмотреть Лена? (Достаточно привести один подходящий ответ.)

Ответ: 12.

Решение. Чтобы вычислить ответ, надо из указанных пяти чисел выбрать четыре так, чтобы сумма двух из них равнялась сумме двух других. Перебором несложно убедиться, что это числа 2, 4, 17, 19 ($2 + 19 = 4 + 17$).

Таким образом, на оставшейся карточке написано число 12 ($2 + 19 = 4 + 17 = 9 + 12$). □

Задача 2. Аня, Боря, Вика и Гена дежурят в течение 20 дней в школе. Известно, что каждый день дежурят ровно трое из них. Аня дежурила 15 раз, Боря — 14 раз, Вика — 18 раз. Сколько раз дежурил Гена?

Ответ: 13.

Решение. Так как каждый день в школе дежурят по 3 человека, то для дежурства нужно всего $3 \cdot 20 = 60$ человек. Получается, Гена продежурил $60 - 15$ (дежурств Ани) $- 14$ (дежурств Бори) $- 18$ (дежурств Вики) $= 13$ раз.

Аня	✓	✓	✓		✓	✓		✓	✓		✓	✓		✓	✓	✓		✓	✓	✓
Боря	✓		✓	✓		✓	✓		✓	✓		✓	✓		✓	✓	✓		✓	✓
Вика	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓		✓	✓
Гена		✓		✓	✓		✓	✓		✓	✓		✓	✓	✓		✓	✓	✓	

Выше приведён пример подходящего расписания дежурств. □

Задача 3. На уроке физкультуры весь класс выстроился по росту (у всех детей разный рост). Дима заметил, что людей, которые выше него, в четыре раза больше, чем людей, которые ниже него. А Лёня заметил, что людей, которые выше него, в три раза меньше, чем людей, которые ниже него. Сколько всего человек в классе, если известно, что их не больше 30?

Ответ: 21.

Решение. Пусть x — количество людей, которые ниже Димы. Тогда всего в классе учится x (люди, которые ниже Димы) $+ 4x$ (люди, которые выше Димы) $+ 1$ (Дима) $= 5x + 1$ (всего людей в классе).

Пусть y — количество людей, которые выше Лёни. Тогда всего в классе учится y (люди, которые выше Лёни) $+ 3y$ (люди, которые ниже Лёни) $+ 1$ (Лёня) $= 4y + 1$ (всего людей в классе).

Тогда, если из количества детей в классе вычесть 1, то полученное число будет делиться и на 4, и на 5. То есть будет делиться на 20. В нужном диапазоне такое число только одно — 20, то есть всего в классе 21 человек. □

Задача 4. В ряд выписано 11 чисел так, что сумма любых трёх идущих подряд чисел равна 18. При этом сумма всех чисел равна 64. Найдите центральное число.

Ответ: 8.

Решение. Пронумеруем числа слева направо от 1 до 11.

Заметим, что сумма центральных пяти чисел (с четвертого до восьмого) равна 64 (сумма всех чисел) $- 2 \cdot 18$ (сумма чисел в первой и в последней тройках) $= 28$.

Тогда шестое (центральное) число равно 18 (сумма четвертого, пятого и шестого чисел) $+ 18$ (сумма шестого, седьмого и восьмого чисел) $- 28$ (сумма центральных пяти чисел) $= 8$. \square

Задача 5. Дядя Фёдор, кот Матроскин, Шарик и почтальон Печкин ели торт (весь торт в итоге был съеден). Дядя Фёдор съел в два раза меньше, чем Печкин, а кот Матроскин съел в два раза меньше, чем та часть торта, которую не съел Печкин. Какую долю торта съел почтальон Печкин, если Шарик съел лишь десятую часть торта? (Ответ запишите в виде десятичной дроби.)

Ответ: 0,4.

Решение. Пусть x — доля торта, съеденная Печкиным. Тогда дядя Фёдор съел $\frac{x}{2}$, а кот Матроскин $-\frac{1-x}{2}$. То есть они вместе съели половину торта. Получается, Шарик и почтальон Печкин вместе съели другую половину торта.

Составим уравнение: x (доля Печкина) $+ 0,1$ (доля Шарика) $= 0,5$; $x = 0,4$. \square

Задача 6. У Коцея Бессмертного есть 11 больших сундуков. В некоторых из них лежит по 8 средних сундуков. А в некоторых средних лежит по 8 маленьких сундуков. В сундуках больше ничего не лежит. Всего у Коцея 102 пустых сундука. Сколько всего сундуков у Коцея?

Ответ: 115.

Решение. Пусть x — количество непустых сундуков.

Рассмотрим процесс, когда Коцей только начал помещать сундуки друг в друга. Первоначально у него было 11 пустых больших сундуков. Каждый раз, когда он клал в какой-то пустой сундук 8 сундуков меньшего размера, общее количество пустых сундуков увеличивалось на 7 (-1 старый пустой сундук и $+8$ новых пустых сундуков).

Получается уравнение $11 + 7x = 102$. Тогда $x = 13$. А всего сундуков у Коцея 115. \square

Задача 7. У дракона есть 40 кучек золотых монет, в любых двух из них количество монет отличается. После того как дракон разграбил соседний город и принес еще золото, количество монет в каждой кучке увеличилось либо в 2, либо в 3, либо в 4 раза. Какое наименьшее количество различных кучек монет могло получиться?

Ответ: 14.

Решение. Оценка. Предположим, что не более 13 кучек увеличилось в одинаковое количество раз. Тогда не более 13 кучек увеличилось в 2 раза, не более 13 — в три раза, не более 13 — в 4 раза. Таким образом у дракона всего не более 39 кучек. Противоречие.

Таким образом, найдутся 14 кучек, количество монет в которых увеличилось в одинаковое количество раз. Раз в этих кучках первоначально было различное количество монет, то и в итоге будет различное количество монет.

Пример. Пусть у дракона первоначально были кучки со следующим количеством монет:

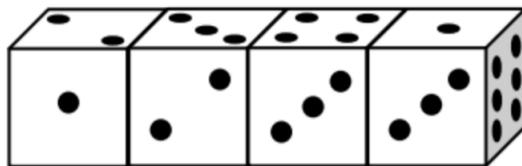
$$\frac{12}{2}, \frac{12}{3}, \frac{12}{4}, \frac{120}{2}, \frac{120}{3}, \frac{120}{4}, \frac{1200}{2}, \frac{1200}{3}, \frac{1200}{4}, \dots$$

$$\dots \frac{12 \overbrace{0 \dots 0}^{12 \text{ нулей}}}{2}, \frac{12 \overbrace{0 \dots 0}^{12 \text{ нулей}}}{3}, \frac{12 \overbrace{0 \dots 0}^{12 \text{ нулей}}}{4}, \frac{12 \overbrace{0 \dots 0}^{13 \text{ нулей}}}{2}.$$

В каждой кучке со знаменателе 2 он увеличил количество монет в 2 раза, в каждой кучке со знаменателем 3 — в 3 раза, со знаменателем 4 — в 4 раза. После этого у него будет 14 различных

значений: $12, 120, 1200, \dots, 12 \overbrace{0 \dots 0}^{12 \text{ нулей}}, 12 \overbrace{0 \dots 0}^{13 \text{ нулей}}$. \square

Задача 8. На одной грани игрального кубика нарисована одна точка, на другой грани — две, на третьей — три, и т. д. Четыре одинаковых игральных кубика сложены так, как показано на рисунке. Сколько в общей сложности точек находится на 6 гранях, которыми касаются кубики?

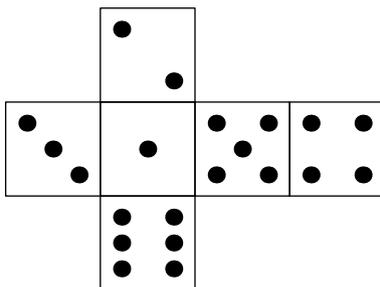


Ответ: 20 точек.

Решение. Заметим, что на соседних с тройкой гранях находятся единица, двойка, четверка и шестерка. Значит, пятерка и тройка находятся на противоположных гранях. Тогда рядом с единицей находятся двойка, тройка, пятерка и шестерка. Значит, единица и четверка расположены на противоположных гранях. Отсюда двойка и шестерка также находятся на противоположных гранях.

Если посмотреть сверху на последний кубик, мы будем видеть единицу, а на боковых гранях в порядке обхода по часовой стрелке будут расположены шестерка, тройка, двойка и пятерка. Тогда у первого кубика на левой грани должно быть три точки, а на правой — пять.

У второго кубика на боковых гранях расположены четыре точки и одна точка. У третьего кубика — шесть точек и две точки. На левой грани четвертого кубика находится две точки. Тогда искомая сумма равна $5 + (4 + 1) + (6 + 2) + 2 = 20$.



□