ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«ПОКОРИ ВОРОБЬЁВЫ ГОРЫ!»

Задания заключительного этапа по МАТЕМАТИКЕ

2012/2013 учебный год

7–9 классы

Задачи 1–6 предлагаются для всех факультетов, а дополнительные задачи 7–10 рассчитаны только на тех, кто желает поступать на механико-математический факультет и факультет вычислительной математики и

7 класс

1. *Найдите остаток от деления числа* $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 2013 + 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2014$ *на 2015.*

   Ответ: *0*

   Решение: $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 2013 + 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2014 \equiv 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 2013 + (-2013) \cdot (-2011) \cdot \ldots \cdot (-1) (\mod 2015)$.

2. *Натуральные числа m и n, $m \neq n$, таковы, что число 2013^m имеет такую же последнюю цифру, как и 2013^n.*
   а) Приведите пример таких чисел m и n.
   б) Выясните, какое наименьшее значение может принимать величина $m + n$.

   Ответ: *a)* $m = 1$, $n = 5$; *b)* $m + n = 6$.

   Решение: *а) Последняя цифра 2013^5 совпадет с последней цифрой $3^5 = 243$. Если же брать меньшие степени, то получаем: 3, 9, 7, 1 — последние цифры все разные.*

3. *Дан угол с вершиной O_1. Провели окружность с центром в точке O_1, она пересекает стороны угла в точках A и B. Потом провели касательные к окружности в точках A и B, они пересеклись в точке O_2. Построили вторую окружность, с центром O_2 и радиусом O_2A и провели касательные в точках A и B. Эти касательные пересекаются в точке O_3. Затем построили окружность с центром O_3, и так далее. Так проделали 1001 раз. Найдите угол $AO_{1001}B$ если $\angle AO_1B = 60^\circ$.*

   Ответ: 60°.

   Решение: *Поскольку касательные перпендикулярны радиусам, проведенным в точки касания, то $AO_1 \perp AO_2$ и $BO_1 \perp BO_2$. Отсюда следует, что касательные ко второй окружности совпадут с прямыми O_1A и O_1B, следовательно, точка O_3 совпадает с O_1. Аналогично, получаем $O_1 = O_3 = ... = O_{1001}$, следовательно, $\angle AO_{1001}B = 60^\circ$.*

4. *Великий алхимик Теофраст фон Парацетамол приготовил колбу с водным раствором эликсира вечной молодости. Первому покупателю Теофраст продал $\frac{1}{2013}$ часть объема колбы и затем долил колбу доверху дистиллированной водой. Второму покупателю он продал $\frac{1}{2012}$ часть объема колбы и снова долил водой, и так далее. Последнему покупателю он продал $\frac{1}{2}$ колбы и снова долил колбу водой. В результате концентрация эликсира молодости в колбе стала равна $0,02\%$. Какова была изначальная концентрация эликсира?*

Ответ:$40,26\%$.

Решение:*Обозначим* p *изначальную концентрацию. Тогда после первого разбавления она станет* $p\cdot\frac{2012}{2013}$, *после второго —* $p\cdot\frac{2012}{2013}\cdot\frac{2011}{2012}$,*... после последнего —* $p\cdot\frac{2012}{2013}\cdot\frac{2011}{2012}\cdot\ldots\cdot\frac{2}{3}\frac{1}{2}=\frac{p}{2013}$. *Приравнивая к* $0,02$, *получаем* $p=40,26$.

5. *Можно ли подобрать целые числа* $A\neq 0$, $B\neq 0$ *и* $C\neq 0$ *так, чтобы каждый из многочленов* $Ax^2+Bxy+Cy^2$, $Bx^2+Cxy+Ax^2$ *и* $Cx^2+Axy+By^2$ *раскладывался на два множителя с целыми коэффициентами.*

   Ответ:*Да, можно.*

   Решение:*Если взять* $a+b+c=0$, *то число 1 будет корнем каждого из трех уравнений. Например, можно взять* $a=1$, $b=2$, $c=-3$.

6. *а) Представьте число 2013 в виде суммы нескольких (более одного) последовательных натуральных чисел.*
   б) Выясните, существует ли способ составить эту сумму так, чтобы она содержала более 63 слагаемых.

   Ответ:*а)* $2013=3\times 671=670+671+672$; *b) Нет.*

   Решение:*Если бы такой способ существовал, то сумма была бы не меньше* $1+2+\ldots+63=2016$.

8 класс

1. *Дан треугольник $\triangle ABC$, точка Q — центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC и продолжений двух других сторон треугольника. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных вокруг треугольников $\triangle ABC$ и $\triangle ABQ$, если радиус первой (описанной около $\triangle ABC$) равен R.*

   Ответ:R.

   Решение: *Обозначим центры окружностей, описанных вокруг треугольников $\triangle ABC$ и $\triangle ABQ$ через O и O_1. Обозначим $\angle ACB = \gamma$. Заметим, что сторона AB видна из точки Q под углом $\frac{\gamma}{2}$, следовательно из точки O_1 она видна под углом γ. Поэтому точка O_1 лежит на описанной вокруг $\triangle ABC$ окружности, следовательно, $OO_1 = R$.*

2. *Агент Бонд (Джеймс Бонд) возводит число 7 в последовательные натуральные степени: $7^1 = 7$, $7^2 = 49$, $7^3 = 343$, … а) Верно ли, что в какой-то момент он получит число, которое оканчивается а)на …7; б) на …007?*

   Ответ: *а) Да. б) Да.*

   Решение: *Докажем для б), для а) аналогично, только рассматривается делимость на 10. Да, рассмотрим последовательные степени 7, по принципу Дирихле какие-то две сравнимы по модулю 1000. Следовательно, $7^n - 7^m \vdots 1000$, поэтому 7^{n-m} оканчивается на 001. Тогда 7^{n-m+1} оканчивается на 007.*

3. *Решите систему*

$$\begin{cases} x \cdot (1+x^2) \cdot (1+x^4) + y \cdot (1+y^2) \cdot (1+y^4) = 0 \\ xy + 1000 = 0. \end{cases}$$

   Ответ:$(10\sqrt{10}, -10\sqrt{10})$ *и* $(-10\sqrt{10}, 10\sqrt{10})$.

   Решение: *Запишем первое уравнение в виде $P(x) + P(y) = 0$, где $P(x)$ — многочлен нечетной степени. Очевидно, при $x = -y$ равенство будет выполнено. Из монотонности P следует, что других решений быть не может. Подставляя во второе уравнение, получим $x = \pm 10\sqrt{10}$.*

4. *Великий алхимик Теофраст фон Парацетамол приготовил колбу с водным раствором эликсира вечной молодости. Первому покупателю Теофраст продал $\frac{1}{2013}$ часть объема колбы и затем долил колбу доверху дистиллированной водой. Второму покупателю он продал $\frac{1}{2012}$ часть объема колбы и снова долил водой, и так далее. Последнему покупателю он продал $\frac{1}{2}$ колбы и снова долил колбу водой. В результате концентрация эликсира молодости в колбе стала равна $0,02\%$. Какова была изначальная концентрация эликсира?*

   Ответ:$40,26\%$.

   Решение: *Обозначим p изначальную концентрацию. Тогда после первого разбавления она станет $p \cdot \frac{2012}{2013}$, после второго — $p \cdot \frac{2012}{2013} \cdot \frac{2011}{2012}$,… после последнего — $p \cdot \frac{2012}{2013} \cdot \frac{2011}{2012} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{3}\frac{1}{2} = \frac{p}{2013}$. Приравнивая к $0,02$, получаем $p = 40,26$.*

5. *Дана бесконечная последовательность: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$ Можно ли выбрать из нее 100 чисел так, чтобы они образовывали арифметическую прогрессию?*

   Ответ: *Да, можно*

   Решение: *Например, можно выбрать $1 - \frac{1}{100!}$, $1 - \frac{2}{100!}$, … $1 - \frac{100}{100!}$,*

6. *а) Представьте число 2013 в виде суммы нескольких (более одного) последовательных натуральных чисел.*
б) Выясните, какое наибольшее количество слагаемых может содержать такая сумма (при условии, что слагаемые — последовательные натуральные числа).

Ответ:*а)* $2013 = 3 \times 671 = 670 + 671 + 672$*; b) 61.*

Решение:$n + (n+1) + ... + (n+k-1) = \frac{(2n+k-1)k}{2} = 2013$, *т.е.* $(2n+k-1)k = 4026 = 2 \times 3 \times 11 \times 61$. *Следовательно,* k *должно быть делителем этого числа. Заметим, что* $k < 63$, *т.к.* $1 + 2 + ... + 63 = 2016 > 2013$. *Взяв* $k = 61$, *получим* $n = 3$.

7. *Учитель написал на доске многочлены с целыми коэффициентами*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad \text{и} \quad Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

и дал задание найти целое значение x, *такое, что* $P(x)$ *делится (нацело) на* $Q(x)$. *Петя Васечкин взялся за дело и, взяв для начала* $x = 0$, *получил* $P(0) = 4$, $Q(0) = 3$. *«Не делится» — подумал Петя, и решил подставить* $x = 1$. *Получилось* $P(1) = -137$, $Q(1) = 0$. *«На ноль делить нельзя», подумал Петя. Он попробовал взять* $x = 2$, *но там получались большие числа и Петя запутался в вычислениях. Напоследок он решил попробовать взять* $x = -1$ *и получил* $P(-1) = 137$, $Q(-1) = -6$. *«Да таких значений* x *просто не существует!» — воскликнул Петя. Прав ли он?*

Ответ:*Да, прав.*

Решение:*Достаточно рассмотреть остаток от деления на 3 многочленов* $P(x)$ *и* $Q(x)$. *Можно заметить, что он равен 0 для* Q *и не равен 0 для* $P(x)$. *Следовательно, таких* x *не существует.*

8. *Найдите наименьшее значение выражения* $2\sqrt{x^2+4} + \sqrt{(x-2)^2+4} + \sqrt{(x-3)^2+16}$.

Ответ:$5\sqrt{5}$.

Решение:*Рассмотрим на координатной плоскости точки* $A(0,2)$, $B(2,-2)$, $C(3,-4)$ *и* $X(x,0)$. *Тогда указанное выражение примет геометрический смысл* $2AX + BC + CX$. *Заметим, что, поскольку точки* A, B *и* C *лежат на одной прямой, то указанная сумма будет минимальна в случае, когда* X *тоже лежит на этой прямой, т.е.* $x = 1$. *Подставляя, получим* $2\sqrt{5} + \sqrt{5} + \sqrt{20} = 5\sqrt{5}$.

9 класс

1. *Решите систему*

$$\begin{cases} x \cdot (1+x^2) \cdot (1+x^4) + y \cdot (1+y^2) \cdot (1+y^4) = 0 \\ xy + 1000 = 0. \end{cases}$$

Ответ:$(10\sqrt{10}, -10\sqrt{10})$ *и* $(-10\sqrt{10}, 10\sqrt{10})$.

Решение:*Запишем первое уравнение в виде* $P(x) + P(y) = 0$*, где* $P(x)$ *— многочлен нечетной степени. Очевидно, при* $x = -y$ *равенство будет выполнено. Из монотонности* P *следует, что других решений быть не может. Подставляя во второе уравнение, получим* $x = \pm 10\sqrt{10}$.

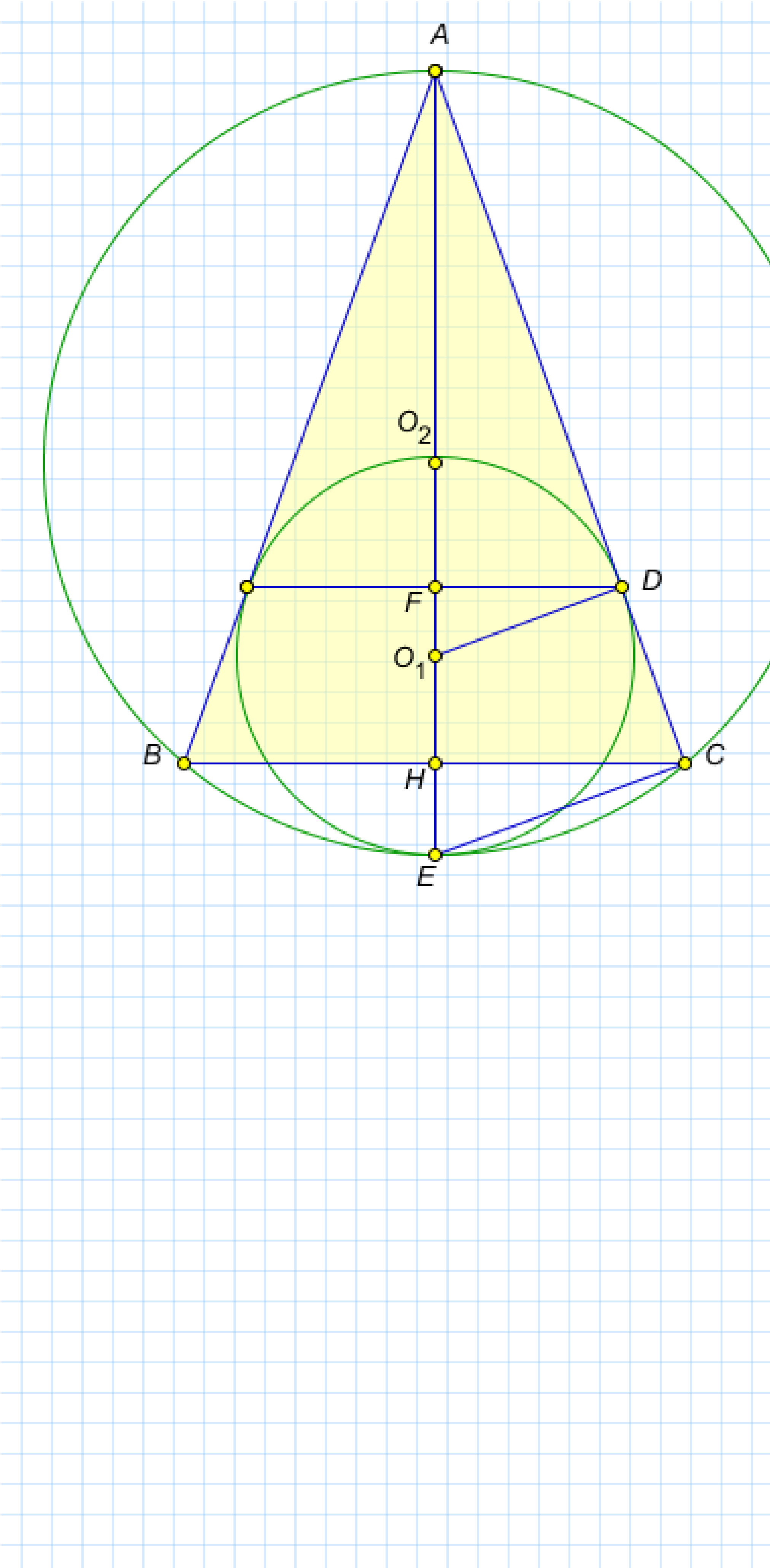
2. *Натуральные числа* m *и* n, $m \neq n$*, таковы, что число* 2013^m *имеет такие же две последние цифры, как и* 2013^n.
а) Приведите пример таких чисел m *и* n.
б) Выясните, какое наименьшее значение может принимать величина $m + n$.

Ответ:$m = 1$, $n = 21$.

Решение:*Надо подобрать такие* m, n*, чтобы* $13^m - 13^n \vdots 100$*, т.е.* $13^{m-n} - 1 \vdots 4$ *и* $13^{m-n} - 1 \vdots 25$ *. Заметим, что* $13^{m-n} - 1 \vdots 4$ *при любых* m, n*. Поскольку* $13^{m-n} - 1 \vdots 25$*, то и* $13^{m-n} - 1 \vdots 5$*, а это возможно только при* $m - n \vdots 4$*. Обозначив* $m - n = 4k$*, получим* $13^{4k} - 1 \vdots 25$*, но* $13^{4k} \equiv 11^k (\mod 25)$*, следовательно, осталось подобрать* k

3. *Вокруг равнобедренного треугольника* $\triangle ABC$ *с основанием* $BC = a$ *и высотой* $AH = h$ *описана окружность* ω_1*. В угол* $\angle BAC$ *вписана окружность* ω_2*, касающаяся окружности* ω_1 *изнутри и касающаяся сторон угла в точках* P *и* Q*. Определите, в каком отношении отрезок* PQ *делит высоту* AH.

Ответ:$a : \sqrt{4h^2 + a^2}$.


A
O_2
D
F
O_1
B
H
C
E

По теореме Фалеса $AF : FH = AD : DC$, будем искать последнее отношение. Заметим, что вписанный угол $\angle ACE = 90^\circ$, так как опирается на диаметр, следовательно $O_1D \| EC$. Применив теорему Фалеса еще раз получим $AD : DC = AO_1 : O_1E$. Обозначим $AC = l$, радиус большой окружности R, маленькой — r. Тогда из подобия $\triangle AO_1D \backsim \triangle ACH$ вытекает, что $\frac{r}{a/2} = \frac{2R-r}{l}$. Отсюда находится $O_1E = r = \frac{Ra}{l+a/2}$, соответственно $AO_1 = AE - O_1E = 2R - r = \frac{2Rl}{l+a/2}$. Разделив, получим $O_1E : AO_1 = \frac{Ra}{l+a/2} : \frac{2Rl}{l+a/2} = \frac{a}{2l} = a : \sqrt{4h^2+a^2}$.

4. *Из пункта A в пункт B ровно в полдень выехал велосипедист; одновременно с ним из B в A выехал автомобиль. Спустя некоторое время из пункта A вслед за велосипедистом выехал мотоциклист, который догнал велосипедиста в тот момент, когда последний встретился с автомобилем. По прибытии в A автомобиль немедленно развернулся и проследовал в пункт B, куда и прибыл одновременно с мотоциклистом, но на 50 мин раньше велосипедиста. Определите, в какой момент времени мотоциклист выехал из пункта A, если известно, что это произошло за 1 ч 20 мин до прибытия туда автомобиля.*

   Ответ: *12 ч. 20 мин.*

   Решение: *Обозначим за x промежуток времени между выездом велосипедиста и мотоциклиста из пункта A. изобразим графики движения, получим (из геометрических соображений)*

$$\frac{x}{4/3} = \frac{5/6}{2(x+4/3)}$$

   что приводит к квадратному уравнению $2x^2 + \frac{8}{3}x - \frac{10}{9} = 0$. Решив его и отбросив неправильный ответ, получим $x = \frac{1}{3}$.

5. *Найдите наименьшее значение выражения*

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + (x+y)^2$$

   при условии, что $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3$.

   Ответ: $-5,25$.

   Решение: *Преобразуем выражение $\left(\frac{x+y}{xy}\right)^2 - 3 \cdot \frac{(x+y)^2 - 2xy}{xy} + (x+y)^2$. Из условия следует, что $x + y = 3xy$, подставляя, получим $\left(\frac{3xy}{xy}\right)^2 - 3 \cdot \frac{(3xy)^2 - 2xy}{xy} + (3xy)^2 = 9 - 3 \cdot (9xy - 2) + 9(xy)^2 = 9 \cdot (xy)^2 - 27xy + 15$. Это — квадратный трехчлен от xy, принимает минимальное значение $-5,25$ при $xy = \frac{3}{2}$. Можно показать, что такие x, y существуют, решив соответствующую систему уравнений.*

6. *Даны n различных составных натуральных чисел $a_1, \ldots, a_n$, принадлежащих интервалу $(1, 2013)$. Известно, что для любых двух различных чисел a_i, a_j из этого набора выполнено условие НОД$(a_i, a_j) = 1$.*
   а) Приведите пример такого набора для $n = 14$.
   б) Докажите, что не существует такого набора, содержащего 15 чисел.

   Ответ: $2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 23^2, 29^2, 31^2, 37^2, 41^2, 43^2$.

   Решение: *Рассмотрим $p_1, ..., p_n$ — последовательность наименьших простых делителей указанных чисел. По условию эти числа разные, можно считать, что они упорядочены по возрастанию. Рассмотрим первые 14 простых чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43. Поскольку числа составные, то $a_k \geqslant p_k^2$. Выбирая*

$a_k = p_k^2$, $k = 1, ..14$, получим, что наибольшее равно $43^2 = 1849 < 2013$. Если же выбрать 15 таких чисел, то последнее будет не меньше $47^2 = 2209 > 2013$.

7. *Найдите a и b, такие, что многочлен $x^{2013} + x^{99} + ax + b$ делится нацело на $x^2 - x + 1$.*

   Ответ: $a = 0$, $b = 2$.

   Решение: *Найдем сначала остаток от деления $x^{2013} + x^{99}$ на $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$. Сделаем замену $t = x^3$ и воспользуемся теоремой Безу, получим, что $t^{671} + t^{33}$ дает остаток -2 при делении на $t + 1$. Следовательно, если взять $a = 0$, $b = 2$, то многочлен будет делиться на $x^3 + 1$, следовательно и на $x^2 - x + 1$.*

8. *Найдите наименьшее значение выражения*

$$\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{(a-3)^2+(b-3)^2} + 2\sqrt{(a-3)^2+(b+1)^2} + 2\sqrt{(a+1)^2+(b-3)^2}.$$

   Ответ: $11\sqrt{2}$.

   Решение: *Отметим на координатной плоскости точки с координатами $A(0,0)$, $B(-1,3)$, $C(3,3)$ и $D(3,-1)$. Тогда данное выражение есть сумма длин отрезков $AX + 2BX + CX + 2DX$, где X — тоска с координатами $X(a,b)$. Сумма $AX + CX$ будет наименьшей, если точка X лежит на отрезке AC. Аналогично, $2(BX + DX)$ минимальна, когда X лежит на отрезке BD. Следовательно, общая сумма будет наименьшей в случае, когда X — точка пересечения диагоналей AC и BD четырехугольника $ABCD$, т.е. $a = b = 1$.*