Математика. Задание по выбору из 8 класса в 9 класс. Школа «Интеллектуал»
Решения
Арифметика

1. (1 б) Укажите наибольшее простое число, делимость на которое числа 2021 надо проверять, чтобы выяснить, простое ли 2021.
   Ответ: **43**
   Решение: Поскольку, если квадрат простого делителя уже больше 2021, мы бы смогли разделить на какое-то меньшее простое число, проверять надо делимость на простые числа, квадрат которых меньше 2021. Квадрат сорока меньше 2021, а квадрат 50 – больше, причем 2021 лежит почти в середине между ними. Стоит попробовать 45. Его квадрат– 2025. Отсюда, проверять надо до простого числа 43, включительно)
   (Было бы неплохо, если бы поступающий умел возводить в квадрат числа, оканчивающиеся на 5: $45^2 = \overline{(4 \cdot 5)_25} = \overline{20_25} = 2025.$ *)*
   Теперь если сообразить, что 2021=45²−4, получаем разность квадратов и сразу раскладываем на простые: 43 и 47.
   Если же не сообразить, то надо проверять делимость на все простые от 2 до 43, чего мы требуем в третьей задаче.
   (За ответ "47" – 0,5 балла.)

2. (1 б) Разложите число 2021 на простые множители. Каждый делитель запишите в отдельном поле ввода.
   Ответ: $43 \quad 47$
   Решение: Если сообразить, (см. 1.) что 2021=45²−4, получаем разность квадратов и сразу раскладываем на простые: 43 и 47.
   (За ответ "1, 43, 47, 2021" или "1, 43, 47" – 0,5 балла.)

3. (3 б) Чему равны остатки от деления 2021 (ответы на подсказки писать не надо):
   Решение: Для решения всех подпунктов надо понимать, что остаток от деления суммы/разности на данное число равен остатку от деления, соответственно, суммы/разности остатков от деления на то же число.
   Кроме того, надо понимать, что делимое может быть и отрицательным числом, например, остаток от деления 40 на 41 такой же, как и от деления −1 на 41.
   a. (0,2 б) на 11. Подсказка: найдите остаток от деления 100 на 11.
      Ответ: **8**
      ***Решение**: остаток от деления каждой сотни на 11 равен 1, а сотен — 20, поэтому искомый остаток будет таким же как при делении 20 + 21 = 41 на 11, то есть 8*
   b. (0,2 б) на 7. Подсказка: найдите остаток от деления 50 на 7.
      Ответ: **5**
      ***Решение**: Каждые 50 дают остаток 1, а пятидесяток в 2021 — 40.* Остаток будет такой же, как от деления 40 + 21 = 61 на 7.
   c. (0,3 б) на 13
      Ответ: **6**
      ***Решение**: Тут каждые сорок дают остаток 1, а сороков — 50. Ищем остаток от деления 50+21 на 13*
   d. (0,2 б) на 19
      Ответ: **7**
      ***Решение**: Тут можно сказать, что 2000 это сто двадцаток, остаток такой*

же, как у числа 121, и шесть двадцаток еще раз заменить каждую на 1. Получим 6 + 1 = 7

e. (0,3 б) на 17 Подсказка: найдите чего не хватает числу 50 до числа кратного 17.
Ответ: **15**
***Решение**: Заметим, что пятидесяти не хватает единицы до кратного 17. Тогда 2000 не хватает 40 единиц, а 2021 — 19 единиц, или, что то же, не хватает 2. Значит, остаток 17 − 2 = 15*

f. (0,3 б) на 29
Ответ: 20
***Решение**: тут каждая тридцатка эквивалентна 1, а их в 2021 — 67, и еще 11 единиц. Ищем остаток от деления 67 + 11 = 78, или, еще раз заменяем 2 тридцатки, и получаем 2 + 18. В результате, остаток равен 20.*

g. (0,3 б) на 23
Ответ: **20**
***Решение**: Замечаем, что 70 тут эквивалентно 1. В 2100 было бы 30 семидесяток. В 2030 — 29 раз, а нам не хватает девяти до 2030. Следовательно 2021 даст тот же остаток, что 29 − 9 = 20*

h. (0,3 б) на 31
Ответ: **6**
***Решение**:* Рассуждаем аналогично f. Только тут каждой тридцатке не хватает единицы. Поэтому получаем −67 + 11 = −56, или −25, то есть 6

i. (0,3 б) на 41
Ответ: **12**
***Решение**: Каждым сорока не хватает единицы. У нас 50 сороков. Получаем: −50+21=−29 То есть остаток равен 12*

j. (0,4 б) на 37
Ответ: **23**
***Решение**: Тут надо заметить, что 3·37=111. То есть 999 делится на 37, а каждая тысяча дает остаток 1. Итого 2+21=23*

k. (0,2 б) на 43
Ответ: **0**
***Решение**: А вот тут проще всего разделить в столбик.*

4. (1 б) Разложите число: $2^{15} - 1$ на простые множители. В ответе дайте простые множители в порядке возрастания через пробел. Множители, входящие в разложение несколько раз, включите в ответ столько раз, сколько они входят. Например, для числа 12 ответ должен выглядеть как **2 2 3**.
Ответ: **7 31 151**

***Решение**:* В задачах 4–6 поможет представить числа вида $2^n - 1$в двоичной системе счисления. Такое число будет выглядеть, как число из n единиц. Тогда, если k, m — делители n, $2^n - 1$ разделится на $2^k - 1$и на $2^m - 1$

Значит среди делителей $2^{15} - 1$будут $2^5 - 1 = 31$ и $2^3 - 1 = 7$. Делим на них и получаем 151. Простота числа 151 легко проверяется.

5. (2 б) Разложите число: $2^{21} - 1$ на простые множители. В ответе дайте простые множители через пробел в порядке возрастания. Множители, входящие в разложение несколько раз, включите в ответ столько раз, сколько они входят.
Ответ: **7 7 127 337**
***Решение**: Решение тут аналогично предыдущей задаче, но вычисления сложнее. Легко находим два делителя: 7 и 127, но разделив на них получаем число 2359, которое надо*

проверять дальше. Оно, очевидно, не делится на 2, 3 и 5, но, к счастью, делится на 7, что легко проверяется при подсчете пятидесяток, как в 3.b

6. (3 б) Укажите два нетривиальных множителя числа $2^{2021} - 1$ (не 1, и не само число). Ответы дайте в виде выражений, не вычисляя их. В ответе можете использовать для умножения знак звездочки: “*”, для деления : “/”, а для возведения в степень — “^”.
   Каждый множитель запишите в отдельном поле ввода.
   Подсказка: подумайте как эти числа будут выглядеть в двоичной системе счисления.
   Ответ: $2^{43} - 1;\ 2^{47} - 1$
   ***Решение**: К этому моменту мы уже знаем, что 2021 делится на 43 и 47, а значит, двоичное число из 2021 единицы разделится на двоичные числа из 43 единиц и из 47 единиц.*

Геометрия

Полученную фигуру для каждого пункта опишите словами. Полный балл ставится за правильное и однозначное описание фигуры.

Найдите фигуру, которую образуют **середины** *всевозможных* отрезков, таких что:

1) (1 б) концы отрезков лежат на двух данных параллельных прямых
   Ответ: прямая, параллельная данным, равноудалённая от них.
   Варианты: “прямая” – 0,3 б. “Прямая, параллельная данным” – 0,6 б.
2) (1 б) отрезки параллельны диаметру окружности, а их концы лежат на окружности
   Ответ: диаметр окружности, перпендикулярный данному (не включая концы этого диаметра).
   Варианты: “отрезок”, “прямая”, “хорда”, “радиус” – 0,1. “Диаметр окружности” или “прямая, перпендикулярная диаметру” – 0,6.
3) (1 б) отрезки соединяют вершину треугольника с точками его основания
   Ответ: средняя линия треугольника, параллельная основанию.
   Варианты: “отрезок” – 0,3. “Прямая, проходящая через середины сторон” – 0,9
4) (1 б) отрезки соединяют боковые стороны данной трапеции и параллельны её основаниям
   Ответ: отрезок, соединяющий середины оснований трапеции.
   Варианты: “высота трапеции” – 0,1; “отрезок” – 0,3; “средняя линия” – 0,3.
5) (2 б) отрезки имеют одинаковую данную длину, а их концы лежат на двух сторонах данного прямого угла
   Ответ: находящаяся внутри данного угла четверть окружности, центр которой — вершина угла, диаметр имеет ту же данную длину.
6) (3 б) концы отрезков лежат на двух диагоналях данного выпуклого четырёхугольника
   Ответ: параллелограмм, вершины которого — середины сторон данного четырёхугольника.
   Варианты: “четырёхугольник” – 1 б, “параллелограмм” – 2 б.