Собеседование в 7-й математический класс 179 школы 27.03.2023

Задача 1. Коля и Оля одновременно выехали из А в Б на своих машинах по одной дороге, проходящей через промежуточный город М. На участке от А до М каждый ехал с постоянной скоростью, и на участке от М до Б тоже. Скорость Коли на участке АМ была больше скорости Оли на участке МБ, а скорость Коли на участке МБ — больше скорости Оли на участке АМ. Могла ли Оля быстрее приехать в Б?

Ответ: могла.

Решение. Пусть, например, длина первого участка 120 км, второго — 50 км, скорость Коли на этих участках — соответственно 60 км/ч и 100 км/ч, а скорость Оли — соответственно 90 км/ч и 50 км/ч. Тогда условие задачи выполнено. При этом Коля потратит на весь путь 2 часа 30 минут, а Оля — 1 час 20 минут плюс 1 час, то есть 2 часа 20 минут. ■

Задача 2. Большой прямоугольник разрезан на меньшие прямоугольники (не обязательно с целыми сторонами), см. рис. Площади некоторых из них (в квадратных сантиметрах) указаны внутри. Какова площадь большого прямоугольника?

2			
4	8		
	16	20	
		25	15

Ответ: 168.

Решение. Так как два верхних левых прямоугольника отличаются по площади в 2 раза, поэтому их вертикальные стороны тоже отличаются в два раза, то есть, площадь каждого прямоугольника из верхнего ряда в 2 раза меньше прямоугольника под ним из следующего (второго) ряда.

Аналогично, посмотрев на прямоугольники площадей 8 и 16, видим, что площади прямоугольников третьего ряда в 2 раза больше площадей соответствующих прямоугольников второго ряда. Наконец, посмотрев на прямоугольники площадей 20 и 25, видим, что площади прямоугольников четвёртого (нижнего) ряда в 5/4 раза больше площадей соответствующих прямоугольников третьего ряда. Поэтому можем последовательно найти нужные площади, чтобы определить верхний ряд:

2	4		
4	**8**	10	
	16	**20**	12
		25	**15**

2	4	5	
4	**8**	10	6
	16	**20**	12
		25	**15**

2	4	5	3
4	**8**	10	6
	16	**20**	12
		25	**15**

Сумма в первом ряду равна 14, а во всей таблице — $14(1+2+4+5) = 14 \cdot 12 = 168$. ■

Задача 3. Десять карточек с надписями 1 г, 2 г, 4 г, $\ldots$, 512 г наклеили по одной на 10 гирь с массами 1 г, 2 г, 4 г, $\ldots$, 512 г, но возможно какие-то надписи перепутали (может даже все). **а)** Как за 9 взвешиваний на чашечных весах, показывающих, какая чаша тяжелее, выяснить, была ли какая-то путаница (не важно, какая именно), или все надписи верные? **б)** Удастся ли сделать это за 8 взвешиваний?

Решение. **а)** Например, можно провести следующие 9 взвешиваний. Первое взвешивание: сравним гирю с надписью 512 г и все остальные гири вместе. Так как сумма всех гирь, кроме самой тяжёлой, равна 511 г, мы проверим, действительно ли гиря с надписью 512 г — самая тяжёлая гиря. Так мы либо узнаем, что есть путаница, либо отложим гирю в 512 г, надпись на которой правильная. Далее действуем аналогично: сравниваем гирю с надписью 256 г и все остальные гири, кроме уже отложенной, и т.д. Нам хватит как раз девяти взвешиваний.

Годится также способ, когда мы сравниваем первым взвешиванием гири 1 г и 2 г, вторым — гири 2 г и 4 г, $\ldots$, девятым — гири 256 г и 512 г. Если хоть в одном из случаев неравенство неправильное, мы знаем, что путаница есть. Если же все неравенства верные, то путаницы нет, поскольку различные числа можно расположить по возратсанию единственным способом.

б) Пусть нам удалось установить, имеется ли путаница, сделав всего 8 взвешиваний. Может случиться, что все неравенства будут верными, то есть, мы подозреваем, что путаницы нет, и надписи на гирях соответствуют их весам. Так как взвешиваний всего 8, а гирь — 10, найдётся гиря, отличная от гири с надписью 1 г, у которой надпись ни в каком из взвешиваний не была самой большой. Тогда если мы поменяем местами веса этой гири и предыдущей по весу, а остальные сделаем правильными, все взвешивания дадут такой же результат, как и в случае, когда все гири правильные. ■

Задача 4. У барона Мюнхгаузена есть клетчатый лист бумаги 100×100, в каждой клетке которого записано число. Барон отметил центры всех клеток красными точками и сообщил: если три красные точки образуют треугольник, две стороны которого равны 7, то три числа, записанные в соответствующих клетках, дают в сумме ноль. Обязательно ли тогда во всех клетках записаны нули?

Ответ: да.

Решение. Рассмотрим центр A любой клетки. Понятно, что найдётся квадрат с вершинами в центрах клеток со стороной длины 7, целиком лежащий внутри листа, одна из вершин которого лежит в центре клетки A. Пусть это квадрат $ABCD$. Обозначим числа, записанные в клетках, соответствующих вершинам квадрата, как a, b, c, d соответственно. Так как $AB = BC = CD = DA = 7$, треугольники ABC, BCD, CDA, DAB удовлетворяют условию. Поэтому $a+b+c = b+c+d = c+d+a = d+a+b = 0$. Из этих равенств $a = d$, $b = a$, $c = b$, то есть, $a = b = c = d$, но тогда $3a = 0$ и все эти числа равны 0. ■

Задача 5. На плоскости даны 10 точек, некоторые из них соединены отрезками. Докажите, что можно рядом с каждой точкой написать натуральное число так, что соединенными отрезком окажутся те и только те пары точек, числа рядом с которыми будут иметь общий множитель, больший 1.

Решение. Напишем на каждом отрезке своё простое число $(2, 3, 5, 7, \ldots)$, не повторяясь, после чего рядом с каждой точкой напишем произведение чисел, написанных на отрезках, выходящих из этой точки. Тогда если точки соединены отрезком, у соответствующих чисел будет общий множитель — простое число, написанное на этом отрезке. Если же вершины не соединены отрезком, общего множителя не будет, так как у соответствующих чисел разные простые множители. ■

Задача 6. На клетчатой доске 8×8 в одной из клеток сидит бактерия. За один ход бактерия сдвигается в соседнюю по стороне клетку и делится на две бактерии (обе остаются в той же клетке). Затем снова одна из сидящих на доске бактерий сдвигается в соседнюю по стороне клетку и делится на две, и так далее. Может ли после нескольких таких ходов добиться того, чтобы **а)** в 63 клетках бактерий было поровну, а одна клетка пустовала; **б)** во всех 64 клетках бактерий было поровну?

Ответ: **а)** да; **б)** нет.

Решение. **а)** Начнём из клетки a1 в шахматной нотации и обойдём доску змейкой — сначала направо до h1, потом на h2 и влево до b2, вверх на b3 и вправо до h3, $\ldots$, а когда пойдём с h7 на h8, далее идём вправо до a8 и вниз до a3. В этот момент клетки a1 и a2 пусты, в клетке a3 две бактерии, а в остальных — по одной. Из клетки a3 идём обратно той же змейкой, пока не вернёмся в a1. В этот момент в клетке a3 одна бактерия, в клетке a2 ни одной, а в остальных клетках — по 2 бактерии. Если теперь бактерия из клетки a3 пойдёт в клетку a2, везде станет по 2 бактерии, кроме клетки a3, где будет пусто. **б)** Рассмотрев шахматную раскраску доски, заметим, что разность количеств бактерий на белых и чёрных клетках при ходе с чёрной клетки на белую увеличивается на 3, а при ходе с белой на чёрную уменьшается на 3. Поскольку в начале эта разность по модулю равна 1, она никогда не станет кратна 3, в частности не станет равна 0. ■

Результаты этого собеседования и дату следующего собеседования мы сообщим по электронной почте.