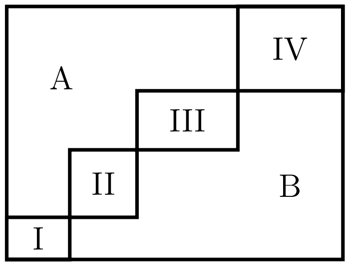
Задача 1. Прямоугольник периметра 2000 разрезан на 4 прямоугольника I, II, III, IV и две многоугольные части A и B, как схематически показано на рисунке. Периметры прямоугольников I, II, III, IV относятся как 1 : 3 : 5 : 7. Найдите сумму периметров фигур A и B.



Ответ: 3000.

Решение. Обозначим периметр прямоугольника I через a. Тогда суммарный периметр прямоугольников I, II, III, IV равен $16a$. Отсюда $16a = 2000$, $a = 125$. Осталось заметить, что сумма периметров A, B, I и IV равна удвоенному периметру большого прямоугольника, поэтому сумма периметров A и B равна $2 \cdot 16a - a - 7 \cdot a = 24 \cdot a = 3000$. ■

Задача 2. У Пети есть два комплекта карточек с числами 1, 2, ..., 179. Можно ли разбить эти карточки на 179 пар так, чтобы в каждой паре карточки были из разных комплектов и давали в сумме степень двойки?

Ответ: Можно.

Решение. Карточку 179 можно дополнить только до 256, это будет карточка 77. Тогда все карточки от 77 до 179 разобьём на пары: 179–77, 178–78, ..., 128–128, ..., 77–179. Следующая свободная карточка — 76, её дополним до 128: 76–52, 75–53, ..., 52–76. Продолжая дальше, получаем: 51–13, 50–14, ..., 13–51. Осталось разбить первые 12 карточек: 12–4, 11–5, ..., 4–12, и наконец 1–3, 2–2, 3–1. ■

Задача 3. В ящике лежат 111 шаров жёлтого, синего, чёрного и белого цвета. Если, не подглядывая, вытащить 100 шаров, среди них обязательно найдутся 4 шара разных цветов. Какое наименьшее число шаров нужно вытащить, не подглядывая, чтобы среди них наверняка нашлись 3 шара разных цветов?

Ответ: 88.

Решение. Если вдруг шаров какого-то цвета 11 или меньше, то будет можно вытащить 100 шаров не доставая шары данного цвета. Значит, шаров каждого цвета хотя бы по 12. Предположим, что шарики по цветам распределились так: 12, 12, 12, 75. Тогда можно достать $75 + 12 = 87$ шариков так, чтобы среди них не было 3 шаров разных цветов. Значит, ответ точно больше 87.

Докажем, что 88 шаров будет достаточно. Заметим, что не взятых шаров всего 23. Никакие два цвета туда не помещаются целиком (так как шаров каждого цвета не менее 12), поэтому среди взятых 88 присутствуют хотя бы три цвета. ■

Задача 4. На доске 179×179 стоят 4 фишки: две чёрные — в противоположных углах доски, на одной диагонали, и две белые — в двух других противоположных углах доски, на другой диагонали. Белые и чёрные ходят по очереди, начинают белые. Каждым ходом любая одна из фишек одного цвета сдвигается на любую соседнюю (по стороне) свободную клетку. Белые фишки стремятся попасть в две соседние по стороне клетки. Могут ли чёрные гарантированно им помешать?

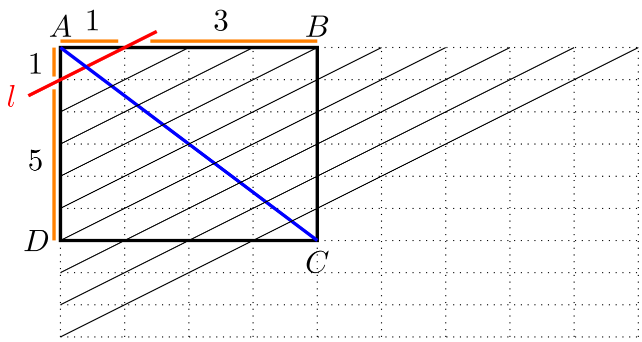
Ответ: Могут.

Решение. Изначально все фишки стоят в вершинах прямоугольника (исходного квадрата). Чёрные могут отвечать на ход белых таким образом, чтобы в результате хода фишки оставались в вершинах прямоугольника. Например, если белые двигают верхнюю правую фишку налево, то в ответ нужно подвинуть нижнюю правую фишку налево. А если белые двигаю её вниз, то нужно левую верхнюю фишку подвинуть вниз. В результате всегда после хода чёрных фишки будут находиться в вершинах прямоугольника, а белые — на диагонали этого прямоугольника, поэтому никогда не смогут оказаться в соседних клетках. ■

Задача 5. Дан прямоугольник $ABCD$. Прямая l делит сторону AB в отношении $1 : 3$, а сторону AD — в отношении $1 : 5$, считая от вершины A. В каком отношении эта прямая делит диагональ AC?

Ответ: 1 к 9.

Решение. Нарисуем прямоугольную сетку, которая делит сторону AB на 4 части, а сторону AD — на 6. Проведём серию линий, параллельных прямой l: для этого будем каждый раз сдвигаться на одну четверть стороны AB вправо и на одну шестую стороны AD вниз. Эти параллельные линии находятся на одном и том же расстоянии друг от друга, поэтому делят диагональ AC на равные части. Потребуется 9 линий, которые разобьют диагональ на 10 частей. Поэтому прямая l разобьёт диагональ в отношении 1 к 9. ■



Задача 6. В турнире по волейболу 5 команд сыграли каждая с каждой по одному разу. Ничьих в волейболе не бывает. Обозначим через A, B, C, D, E количества побед, одержанных этими командами, а через a, b, c, d, e — количества их поражений. Докажите, что $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2$.

Решение. Нам известно, что $A = 4 - a$, $B = 4 - b$, $C = 4 - c$, $D = 4 - d$, $E = 4 - e$ (каждая команда сыграла 4 игры), и $A + B + C + D + E = 10$ (было сыграно 10 матчей). Тогда

$$A^2+B^2+C^2+D^2+E^2-(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2) = A^2+B^2+C^2+D^2+E^2-(4-A)^2-(4-B)^2-(4-C)^2-(4-D)^2-(4-E)^2 =$$

$$= 8A + 8B + 8C + 8D + 8E - 16 - 16 - 16 - 16 - 16 = 8 \cdot (A + B + C + D + E - 2 \cdot 5) = 0$$

■

Задача 7. При каких натуральных n квадратный остров можно разбить на n прямоугольных участков одинаковой площади и с одинаковой длиной береговой линии?

Ответ: При $n = 1$, $n = 2$ и $n = 4$.

Решение. При $n = 1$ делить не нужно, при $n = 2$ разделим квадрат пополам, при $n = 4$ — на 4 равных квадрата.

Докажем, что при остальных n это не получится.

Пусть длина стороны острова 1 и мы разрезали остров на n прямоугольных кусков. Тогда площадь одного прямоугольного куска равна $1/n$, а длина береговой линии, принадлежащая одному прямоугольному куску равна $4/n$.

Если один из кусков содержит хотя бы три вершины квадрата, то он содержит и четвертую, то есть это целиком квадрат, значит, $n = 1$.

Если один из кусков содержит ровно две вершины квадрата, то он имеет размеры $1 \times a$, причём выполнены равенства $1 + 2a = 4/n$, $1 \cdot a = 1/n$, откуда $1 + 2/n = 4/n$, и $n = 2$.

Если какой-то из кусков не содержит ни одной вершины квадрата, то он имеет либо ровно один кусок береговой линии, либо два на противоположных сторонах.

Во втором случае обе стороны прямоугольника, выходящие на берег, равны $2/n$, а перпендикулярные им стороны равны тогда $1/2$ (чтобы площадь равнялась $1/n$), но они же равны 1 (так как соединяют противоположные стороны квадрата) — противоречие.

В первом случае сторона прямоугольника, выходящая на берег, равна $4/n$, а перпендикулярная ей сторона равна $1/4$ (чтобы площадь была равна $1/n$). Значит, такие прямоугольники в «глубину» имеют размер обязательно $1/4$, поэтому центр квадрата в такой прямоугольник попасть не может. Значит, центр квадрата содержится в каком-то прямоугольнике, содержащем вершину квадрата, а тогда площадь этого куска не менее $1/4$. Значит, длинная сторона предыдущего куска («глубины» не более $1/4$) равна не менее 1, что невозможно.

Оставшийся случай — когда все участки содержат ровно одну вершину квадрата. Но это возможно только в случае $n = 4$. ■
