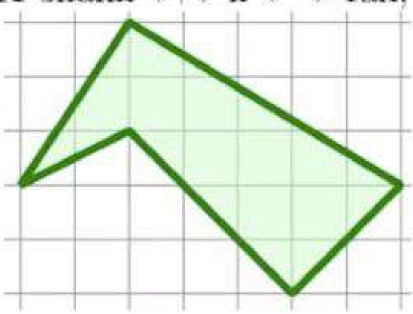
Занятие №Т1 14.03.2023

Время на решение: 90 минут. После 18:40 внесите ваши ответы и фотографии черновиков в телеграм-бот.

Задача Т1.1. Расставьте между некоторыми из цифр числа 1111111 знаки «+» и «−» так, чтобы значение получившегося выражения равнялось 100. (Запишите выражение, например: $1 - 1 - 11 + 11$.)

Задача Т1.2. Найдите наименьшее четырёхзначное число, все цифры которого различны и которое делится на 9.

Задача Т1.3. Найдите площадь фигуры, изображённой на рисунке справа. Площадь одной клеточки равна 1.



Задача Т1.4. Петсон и Финдус прыгнули с берега в воду и поплыли к скале в центре озера. Финдус проплыл 40 метров, когда Петсон достиг скалы. Петсон тут же поплыл обратно и встретил Финдуса в тот момент, когда Финдус проплыл ещё 8 метров. Сколько метров было от берега до скалы?

Задача Т1.5. Стороны четырёхугольника $ABCD$ имеют длины $AB = 9$ см, $BC = 2$ см, $CD = 14$ см, $DA = 5$ см. Найдите длину диагонали AC, если известно, что она выражается целым числом сантиметров.

Задача Т1.6. В магазине продают супы в пачках. Четыре харчо плюс шесть борщей стоят 590 рублей, а шесть борщей плюс четыре харчо стоят 560 рублей. Сколько рублей стоит пачка борща?

Задача Т1.1. Расставьте между некоторыми из цифр числа 1111111 знаки «+» и «−» так, чтобы значение получившегося выражения равнялось 100. (Запишите выражение, например: $11+11-1+11$.)

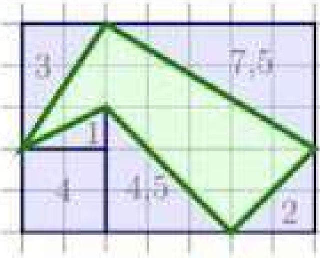
Ответ: Например, $111 - 11 + 1 - 1$.

Задача Т1.2. Найдите наименьшее четырёхзначное число, все цифры которого различны и которое делится на 9.

Ответ: 1026.

Решение. Старшая цифра минимум 1, следующие две, если брать самые маленькие возможные, не повторяясь — это 0 и 2. Далее берём минимальную подходящую цифру, чтобы итоговое число делилось на 9 — это цифра 6, она не совпадает с предыдущими. ■

Задача Т1.3. Найдите площадь фигуры, изображённой на рисунке справа. Площадь одной клеточки равна 1.



Ответ: 13.

Решение. Фигура вписана в прямоугольник 7×5. Из него можно выкинуть несколько треугольных половинок других прямоугольников, чтобы получить исходную фигуру. Искомая площадь равна $35 - 3 - 1 - 4 - 7{,}5 - 4{,}5 - 2$. ■

Задача Т1.4. Петсон и Финдус прыгнули с берега в воду и поплыли к скале в центре озера. Финдус проплыл 40 метров, когда Петсон достиг скалы. Петсон тут же поплыл обратно и встретил Финдуса в тот момент, когда Финдус проплыл ещё 8 метров. Сколько метров было от берега до скалы?

Ответ: 60.

Решение. Пусть всё расстояние равно $40 + 8 + x$. Тогда $(40 + 8 + x) : 40 = x : 8$. Домножая на 40, имеем: $48 + x = 5x$, откуда $x = 12$. ■

Задача Т1.5. Стороны четырёхугольника $ABCD$ имеют длины $AB = 9$ см, $BC = 2$ см, $CD = 14$ см, $DA = 5$ см. Найдите длину диагонали AC, если известно, что она выражается целым числом сантиметров.

Ответ: 10.

Решение. Мы воспользуемся неравенством треугольника — сумма двух сторон всегда больше третьей. Из треугольника ABC видим, что $AC < AB + BC = 9 + 2$, то есть $AC < 11$, а из треугольника ADC видим, что $14 = CD < DA + AC = 5 + AC$, откуда $9 < AC$. Значит, $9 < AC < 11$, и так как длина диагонали — целое число, получаем единственный вариант. ■

Задача Т1.6. В магазине продают супы в пачках. Четыре харчо плюс шесть борщей стоят 590 рублей, а шесть харчо плюс четыре борща стоят 560 рублей. Сколько рублей стоит пачка борща?

Ответ: 65 рублей.

Решение. Сложив два набора, получим, что 10 харчо и 10 борщей стоят 1150 рублей. Значит, борщ плюс харчо стоят 115 рублей. Тогда 4 борща плюс 4 харчо стоят 460 рублей, а два борща стоят $590 - 460 = 130$ рублей. Поэтому один борщ стоит 65 рублей. ■

Задача Т2.1. Две параллельные стороны квадрата увеличили в полтора раза каждую, а две другие стороны квадрата уменьшили на 10 см каждую. Получился прямоугольник с тем же периметром, что и исходный квадрат. Какова длина стороны исходного квадрата в сантиметрах?

Ответ: 20.

Решение. К периметру исходного квадрата добавляются две половинки двух его сторон и вычитается 20 см. Так как периметр не должен измениться, сторона равнялась 20 см. ■

Задача Т2.2. Сколько шестизначных чисел вида $\overline{abcabc}$, где цифры a, b, c различны, делятся на 7?

Ответ: 648.

Решение. Заметим, что $\overline{abcabc} = 1001 \cdot \overline{abc} = 7 \cdot 143 \cdot \overline{abc}$ всегда делится на 7. Значит, надо подсчитать количество чисел вида $\overline{abc}$, в которых цифры различны и старшая цифра не ноль. Для старшей цифры есть 9 вариантов, для средней — тоже 9, для последней — 8, откуда получаем ответ $9 \cdot 9 \cdot 8$. ■

Задача Т2.3. Два мопеда едут по одной прямой дороге: один — со скоростью 60 км/ч, другой — со скоростью 40 км/ч; расстояние между ними — 150 км. Через сколько часов расстояние между ними может снова стать равным 150 км? Укажите все возможные ответы через запятую.

Ответ: 3, 15.

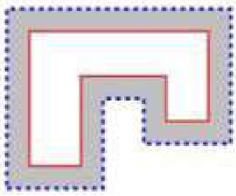
Решение. Мопеды двигаются либо навстречу друг другу, либо друг за другом. В первом случае скорость их сближения равна 100 км/ч, так что они встретятся через 1,5 часа, а ещё через 1,5 часа снова окажутся на расстоянии 150 км друг от друга. Во втором случае расстояние либо постоянно увеличивается и не сможет снова стать равным 150 км (если «быстрый» мопед едет впереди «медленного»), либо «быстрый» мопед догоняет «медленный» со скоростью сближения 20 км/ч. Встреча произойдёт через 7,5 ч, и ещё через 7,5 ч автомобили снова будут в 150 км друг от друга. ■

Задача Т2.4. У барона Мюнхгаузена было 11 карточек — заготовок для дробей (черта посередине, вверху можно написать числитель, а внизу — знаменатель). Он вписал туда числа 1, 2, 3, ..., 22, каждое ровно по разу. Сколько целых дробей максимум могло у него получиться? (В решении приведите в подтверждение своего ответа пример, который мог получиться у барона.)

Ответ: 10.

Решение. Заметим, что любое из чисел 13, 17 и 19, будучи знаменателем, даст нецелую дробь, а будучи в числителе может дать целую дробь, только если его поделить на 1. Значит, минимум два числа из них будут участвовать в нецелых дробях, поэтому такая дробь минимум одна (если они оба в одной дроби). Сделать же 10 целых дробей нетрудно, например, так: $\frac{19}{1}$, $\frac{10}{2}$, $\frac{21}{3}$, $\frac{20}{4}$, $\frac{15}{5}$, $\frac{12}{6}$, $\frac{14}{7}$, $\frac{16}{8}$, $\frac{18}{9}$, $\frac{22}{11}$, и одна дробь осталась нецелой — это $\frac{17}{13}$. ■

Задача Т2.5. Вокруг парка (белая фигура на рисунке) проложили дорожку постоянной ширины (закрашена серым). Петсон прошёл всю дорожку по её внешнему краю (пунктирная линия), а Финдус — по внутреннему (сплошная линия). В итоге Петсон прошёл на 20 м больше, чем Финдус. Какова ширина дорожки в метрах?



Ответ: 2,5.

Решение. Каждому отрезку на внешнем периметре отвечает идущий рядом отрезок на внутреннем периметре. Осталось понять, насколько они отличаются. Пусть ширина дорожки равна x. Всего у парка 8 углов. В каждом из этих углов, кроме двух внутренних, два пунктирных отрезка суммарно превышают сплошные на $2x$, а в каждом из двух внутренних углов наоборот — два сплошных отрезка суммарно превышают пунктирные на $2x$. Значит, вся пунктирная линия на $6 \cdot 2x - 2 \cdot 2x = 12x - 4x = 8x$ длиннее сплошной, откуда $8x = 20$, то есть $x = 2{,}5$. ■

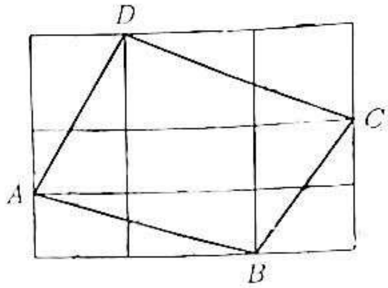
Задача Т2.6. Первый и третий краны, работая вместе, засыпают котлован песком за 100 часов, второй и третий — за 150 часов, первый и второй — за 240 часов. Сколько часов им потребуется чтобы вместе засыпать котлован?

Ответ: 96.

Решение. За 1200 часов два первых, два вторых и два третьих крана засыплют $12 + 8 + 5 = 25$ котлованов. Значит, первый, второй и третий кран засыплют 25 котлованов за 2400 часов, откуда один котлован будет засыпан за $2400/25 = 96$ часов. ■

Собеседование в 7-й математический класс 179 школы 19.03.2023

На работу даётся 2 часа. Условия переписывать не нужно, но указывайте номер задачи. Решать задачи можно в любом порядке. Требуется не только ответ, но и подробное объяснение.



1. На картинке справа большой прямоугольник площади 2023 разделён прямыми на 9 меньших прямоугольников. Площадь центрального прямоугольника равна 179. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$.

2. Петсон взял натуральное число, цифры которого увеличиваются слева направо (например, 179 или 123456789), и умножил на 9. Докажите, что сумма цифр результата обязательно равна 9.

3. В картонном прямоугольнике провели 9 прямых, параллельных одной паре его сторон, и 9 прямых, параллельных другой паре его сторон. В результате исходный прямоугольник разбился на 100 меньших прямоугольников. Когда измерили периметры у 91 из них, все они оказались целыми. Обязательно ли тогда и у оставшихся прямоугольников периметры тоже целые?

4. Найдутся ли такие рациональные числа x, y и z, что каждое из них не меньше 100, а произведение $(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)$ положительно, но меньше $\frac{1}{100}$?

5. Поверхность куба $3\times3\times3$ разделили на квадратики 1×1 и в каждый квадратик посадили одного жука (всего 54 штуки). По команде каждый жук переполз в соседний по стороне квадратик, причём снова пустых квадратиков не осталось. Обязательно ли какие-то два жука поменялись местами?

6. В турнире по шахматам состязались два гнома и несколько эльфов. Каждый сыграл с каждым ровно одну партию. Гномы суммарно набрали 6,5 очков, а все эльфы — по одному и тому же числу очков. Сколько было эльфов? Приведите пример, как такое могло быть, и докажите, что другого количества эльфов быть не могло. (За выигрыш даётся 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за поражение — 0 очков.)

Результаты этого собеседования и дату следующего собеседования мы сообщим по электронной почте.