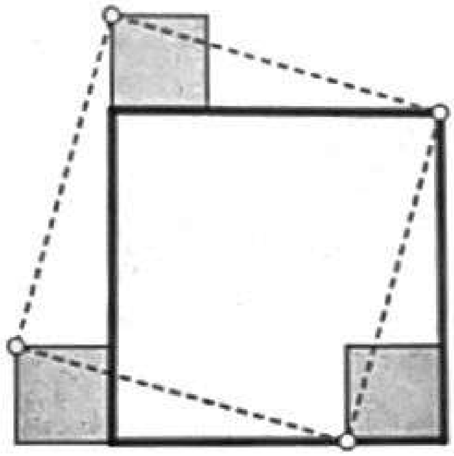
Собеседование восьмиклассников. 19 марта 2022

Прочтите комментарии на обороте!



0 **[Это письменная задача. Запишите решение на отдельном листе бумаги (любом), ПОДПИШИТЕ ЕГО и сдайте в конце собеседования дежурному по кабинету.]** На рисунке справа изображены четыре серых квадрата, три меньших из которых равны. Докажите, что пунктирная фигура — тоже квадрат.

1 Ученикам начальной школы объявили, что в следующем году они станут взрослыми пятиклассниками, и поэтому классы перемешают. Чтобы им не было совсем грустно, каждому разрешили написать на бумажке имена двух друзей. Когда классы перемешают, у каждого хотя бы один из этих двух друзей станет одноклассником. Компания из пяти друзей не хочет разлучаться. Могут ли они написать на своих бумажках такие имена, чтобы их пятерых обязательно отправили в один класс?

2 Полина нарисовала таблицу 3×3 и написала в каждую из её клеток число от 1 до 9 так, что все числа были использованы по разу. Вася посмотрел в этой таблице на четыре квадрата 2×2 и для каждого нашёл среднее арифметическое четырёх чисел в этом квадрате. Четыре полученных числа Вася написал на свою бумажку. Тамара посмотрела на листок Васи и заметила, что не только эти четыре числа – целые и попарно различные, но и их среднее арифметическое тоже целое.

а) Чему оно равно?

б) Приведите пример таблицы, которую могла нарисовать Полина.

3 Известно, что для некоторой тройки натуральных чисел x, y, z выполняется равенство

$$(x^2+1)(y^2+1) = z^2+1.$$

а) Приведите пример таких чисел x, y, z.

б) Найдите ещё одну подходящую тройку, в котором было бы другое значение z, чем в вашем решении предыдущего пункта.

в) Докажите, что существует бесконечно много таких троек.

4 а) Какое наибольшее количество диагоналей можно провести в правильном 179-угольнике так, чтобы каждые две имели общую точку? (Если диагонали имеют общую вершину, то это тоже считается за общую точку.)

б) Тот же вопрос про правильный 180-угольник.

в) Тот же вопрос про произвольный выпуклый 179-угольник.