

Краткие решения задач олимпиады 5 класса

26 января 2020

Часть А

К каждой задаче необходимо указать ответ. Решения приводить не требуется.

1. Напишите наибольшее число с разными цифрами, у которого соседние цифры отличаются не менее, чем на 2. (фольклор)

Ответ. 9758642031

2. Обезьянкам Анфисе, Дусе и Мусе дали бананы – всего в сумме не более 10. Анфиса дала 1 банан Дусе и 2 банана Мусе, после чего у всех стало поровну. Какое количество бананов могло быть у Анфисы изначально? (Укажите все варианты) (фольклор)

Ответ. 5 или 6 бананов.

Решение. Поскольку в результате у всех оказалось поровну, то общее количество бананов должно делиться на 3. Для чисел не более 10 это 3, 6 и 9. Если это 3, то после раздачи бананов у каждой должно стать по 1, но такое быть не может, так как Анфиса дала Мусе 2 банана. А 6 и 9 быть могут. В первом случае у Анфисы было 5 бананов, у Дуси 1, а у Муси - ни одного. Во втором случае у Анфисы было 6, у Дуси 2, у Муси 1.

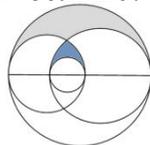
3. Закрасьте две клетки, чтобы получить верное математическое равенство. Закрашенная клетка не участвует в вычислениях и может быть в любом месте, даже между цифрами числа (« / » – знак деления). (О.Леонтьева)

4	8	/	1	2	+	3	=	5	+	7	2	/	1	2	?
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Ответ. 48/12+3=5+2/1 или 8/1+3=5+72/12

4. Леша и Костя ели пиццу – им привезли 4 штуки: диаметра 28см, 18см, 16см и 6см – подарок за заказ. Леша съел самую большую и самую маленькую, а Костя – две средних. Кто съел больше? (Е.Иванова) **Ответ.** Леша

Решение. Поскольку $28+6=18+16$, то можно нарисовать такую картинку. И ответ на вопрос «Кто съел больше?» зависит от ответа на вопрос «Какая часть больше – темная закрашенная или светлая закрашенная?» Светлая больше.



5. В Новом Году Дед Мороз хочет составить магический квадрат, в котором суммы чисел в столбцах, строках и двух больших диагоналях. (по мотивам фольклора В.Попов)

Ответ. на рисунке

Решение. Поскольку (первая строчка, второй столбец) $2019+2021+C=2020+C+F$, то $F=2020$. Диагональ и нижняя строка дает $B=2021$. Далее все однозначно восстанавливается, так как известна сумма в каждой строке/столбце.

2019	C	2021
D	2020	E
A	F	B

2019	2020	2021
2022	2020	2018
2019	2020	2021

6. В городе Полоссити на всех дорогах странная разметка: первая полоска длиной 1м, затем разрыв 1м, затем полоска длиной 2м, снова разрыв 1м, затем полоска 3м, разрыв, ... и так далее, пока дорога не кончится. Если в конце не хватает длины дороги, то полоска просто обрывается.

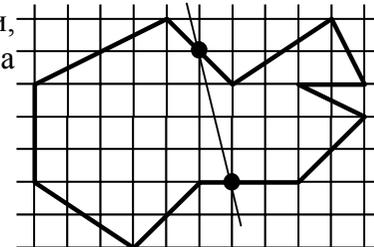


... Разметку сделали вдоль набережной протяженностью 2020 метров. А) Сколько полосок в разметке вдоль набережной? Б) Какова длина последней полоски? (Е.Иванова)

Ответ. А) 63 полоски; Б) 5метров длина последней.

Решение. Добавим к каждой полоске длину разрыва. Тогда мы получим сумму последовательных чисел от 2 до N, которая не превосходит 2020. Добавим 1, тогда $N(N+1)$ не превосходит 4040. Так как $63^2=3969$, а $64^2=4096$, то искать нужно около 63-64. Действительно Сумма числе от 1 до 63 равна 2016, а сумма чисел от 1 до 64 равна 2080, что уже больше 2020. Вычитаем добавленное для удобства число 1. Значит сумма от 2 до 63 (62 полоски с разрывами) равна 2015. Поэтому на последнюю полосу остается только 5м

7. Отметьте на линиях сетки две точки, чтобы они разделили данную ломаную на два куса одинаковой длины.. (Е.Иванова)

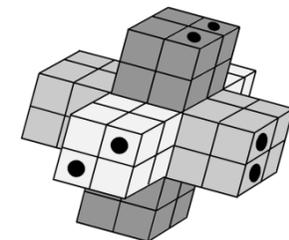


Ответ. на рисунке

Решение. Заметим, что присутствуют линии таких типов: 1) стороны клетки (3, 3 и 2); 2) диагонали прямоугольников 1x2 (2, 1 и 1)

3) Диагонали прямоугольников 2x3 (ровно две) 4) диагонали квадратов 2x2 (3 штуки). Поскольку диагоналей квадратов 2x2 три, то хотя бы одну из них придется разделить нашей точкой. Аналогично для отрезков вдоль сторон сетки. Перебрав несколько вариантов, находим искомые точки.

8. Чтобы войти в подземелье, Гарри Поттер сделал из одинаковых магических кубиков амулет, как на рисунке. Но коварный Драко Малфой проделал своей волшебной палочкой шесть сквозных отверстий, каждое из которых прошло ровно через шесть



кубиков (параллельно рёбрам маленьких кубиков). А) Сколько маленьких магических кубиков осталось неповреждёнными, если внутри амулета нет пустот? Б) Сколько маленьких кубиков проткнули три раза? (И.Гришина)

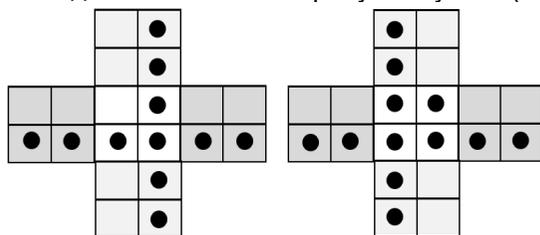
Ответ. А) 25 кубиков; Б) 1 кубик.

Решение. Рассмотрим отдельно слои крестообразной фигуры, начиная сверху, и отметим повреждённые кубики в каждом слое.

Два самых верхних и два самых нижних слоя одинаковые:



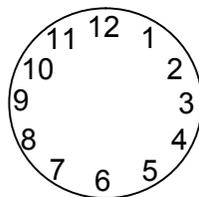
В каждом из них по 2 нетронутых кубика (всего 8). Два следующих слоя:



В этих слоях $9+8=17$ нетронутых кубиков. Итого 25.

Б) Проткнутые три раза = проткнутые с трех сторон. Такие кубики могут быть только в середине амулета. И такой кубик один (правый ближний сверху)

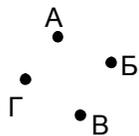
9. На радужной фабрике для сборки настенных часов (см.рис) нужен комплект из 15 пластмассовых цифр 15 разных цветов. Сколько различных циферблатов можно изготовить на этой фабрике, если все комплекты абсолютно одинаковы? (О.Парамонова)



Ответ. 480.

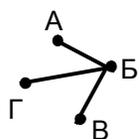
Решение. Если цифра используется в единственном экземпляре, то понятно, что переместить ее никуда не удастся и вклад в новые варианты она не дает. Поэтому стоит рассматривать только цифры 2 (2 штуки), цифры 1 (5 штук) и цифры 6 и 9 можно поменять местами, переворачивая. Таким образом, количество различных перестановок (а, значит, и различных циферблатов) равно $2 \times 2 \times 5! = 4 \times 120 = 480$

10. В компании из четырех человек Алёша заявил: «У меня тут нет друзей». Боря подхватил: «А у меня тут ровно 1 друг». Вася добавил: «А у меня ровно 2 друга». Гоша сказал: «А у меня 3 друга!» Оказалось, что все, у кого чётное количество друзей, сказали правду, а те, у кого нечётное – соврали. Нарисуйте, кто с кем дружит. (Е.Иванова)



Ответ. На рисунке

Решение. Заметим, что так как Боря и Гоша не могли сказать правду, то у Гоши обязательно один друг, а у Бори – три.



Это значит, что Боря дружит со всеми в этой компании, а Гоша – только с Борей. Осталось выяснить, дружат ли Алеша и Вася. Если дружат, то у них у каждого по 2 друга. Тогда они оба должны были сказать правду. Но Алеша солгал. Значит, такой вариант невозможен.

Часть Б

В этой части кроме ответа требуется привести решение.

1. Буквы А, И, Б, О сидели на трубе. Одна буква упала с трубы один раз, другая – два раза, а остальные попадали по три раза. Сколько раз упала с трубы буква А, если буква И упала не три раза, буквы А и Б падали разное количество раз и буквы О и Б падали разное количество раз? (О.Парамонова)

Ответ. 3 раза

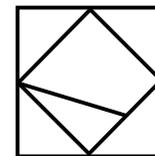
Решение. Поскольку буква И упала не три раза, то она упала два или один раз. В любом случае не было букв, падающих с ней одинаковое количество раз. Тогда среди трех остальных букв две буквы упали одинаковое число раз, то есть 3. Из условия, что буквы А и Б падали разное количество раз и буквы О и Б падали разное количество раз следует, что одинаковое число раз упали А и О.

2. У Гарри в пробирке емкостью 2мл налито 1мл вещества А, в пробирке емкостью 4мл налито 4мл вещества В, в пробирке емкостью 7мл налито 7мл вещества С. Известно, что если в равных пропорциях смешать два разных вещества, то получится третье. Если же пропорции будут неравными, то будет взрыв. Гарри нужно получить по 4мл каждого вещества. Как ему это сделать, если у него еще есть пустая пробирка емкостью 2мл? Все пробирки волшебные – вещество можно полностью вылить и следов не останется. Делений на пробирках нет. (Е.Иванова)

Ответ. В таблице указана последовательность переливаний.

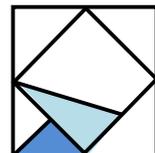
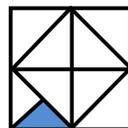
2мл	4мл	7мл	2мл
1А	4В	7С	0
1А	2В	7С	2В
1А	4А	5С	2В
2В	4А	4С	2В

3. В квадрате со стороной 4 нарисовали еще один квадрат с вершинами в серединах сторон. Две середины сторон разных квадратов соединены отрезком (см.рис). Найдите площадь квадрата, сторона которого равна этому отрезку. (О.Парамонова)



Ответ. 10см^2 .

Решение. Проведем еще один отрезок и рассмотрим два треугольника (на рисунке они закрашены). Большой треугольник – это четвертая часть внутреннего квадрата. То есть 4 таких треугольника по площади дадут целый квадрат. Два маленьких треугольника по площади составляют одну 8 часть большого



квадрата. А внутренний квадрат – половину большого квадрата. Но из четырех больших треугольников и двух маленьких можно составить квадрат как раз с требуемой стороной (см.рис). Значит, его площадь равна $5/8$ площади исходного большого, площадь которого равна 16см^2 .



4. Коля положил на стол несколько кубиков белого, синего, красного, зеленого и черного цвета в ряд. Оказалось, что для любых двух цветов найдется пара кубиков этих цветов, которые лежат рядом. То есть есть белый и красный кубики, лежащие рядом, зеленый и белый кубики, лежащие рядом, а так для любой пары цветов. Какое минимальное количество кубиков может лежать на столе? (Н. Михайловский)

Ответ. 11 кубиков

Решение. Поскольку каждый цвет должен образовывать хотя бы 4 пары с 4 остальными цветами, а кубик в середине ряда образует не более 2 пар, то кубиков каждого цвета не менее $4 : 2 = 2$, при этом есть крайние кубики в ряду, которые образуют только по 1 паре. Значит, 2 кубиков каждого цвета не хватит для того, чтобы все возможные пары встречались, ведь мы считали в предположении, что любой кубик образует две пары, то есть находился в середине ряда. Значит, кубиков как минимум $5 \times 2 + 1 = 11$. Осталось привести пример на 11 кубиков. Например, так: БСКЗЧБКЧСЗБ

5. На острове Ромба живут рыцари и лжецы (рыцари говорят только правду, лжецы всегда лгут). В каждой треугольной области живёт ровно 1 человек, соседними считаются области, граничащие по стороне. Утром каждый из них сказал: «Среди моих соседей не более 1 рыцаря». Какое наибольшее число рыцарей может проживать на острове? (К. Бондаренко)

Ответ. 6 рыцарей

Решение. Сказанное в условии означает, что среди соседей либо 0, либо 1 рыцарь. Поэтому в самой верхней и самой нижней области не могут жить лжецы, ведь у них всего 1 сосед и в любом случае не может быть более 1 рыцаря. Поэтому там живут рыцари. Далее заметим, что в выделенных цветом фигурках из 3 треугольников не могут жить по 3 рыцаря, ведь тогда у среднего будут хотя бы два соседа рыцаря. Значит, там живут не более 2 рыцарей, а всего рыцарей $2 + 2 \cdot 2 = 6$. Пример на рисунке.



Критерии:

Каждый правильный ответ в части А стоит 2 балла (если пунктов несколько, то каждый пункт стоит 2 балла).

В части Б оценивается решение – от 0 до 5 баллов.

Творческая Лаборатория «Дважды Два»



Творческая лаборатория «2×2» – содружество преподавателей, студентов, аспирантов и просто математиков, обеспокоенных состоянием математического образования в России. Мы хотим, чтобы наши дети росли любознательными, заинтересованными, грамотными, и стараемся по мере сил этому

содействовать. За много лет работы мы создали систему обучения детей математике с 1 по 11 класс. Она включает в себя матклассы, олимпиады различного уровня, кружки в разных точках Москвы.

Кроме олимпиад мы проводим выездные математические школы для всех классов. Школы проводятся в период каникул, а также майских праздников. Кроме того мы проводим мини-школы или школы выходного дня. Ближайшая выездная школа планируется с 3 апреля.

Летняя школа в Подмосковье (3 смены) – с 1 июня по 2 июля – 0-7 кл.

Летняя школа в Болгарии (5 смен) – с 19 июня по 16 августа – 0-9 класс.

Летняя школа в Подмосковье – со 2 по 25 августа – для 4–10 классов.

Большое внимание мы уделяем также нашим математическим классам на базе разных школ Москвы. В прошлом наши ученики завоевали более десятка золотых медалей на международных олимпиадах по математике и физике, а также разнообразные призы и награды на других соревнованиях России и других стран. В частности в 2015 и 2016 годах наших ученики в составе сборной России на международной Олимпиаде по математике завоевали две серебряные и две золотые медали. В 2018 году – золотую медаль на олимпиаде по астрономии.

Более подробно со всеми направлениями нашей работы в можете познакомиться на сайте.

Олимпиада 5 класса

Письменный тур.

Результаты письменного тура будут опубликованы после 16 февраля на нашем сайте. <http://mathbaby.ru>

Устный тур.

Устный тур пройдет 15 марта. Место пока определяется. На него будут приглашены участники, показавшие высокий результат на письменном туре.